Уравнения Эйнштейна и его свойства
Казакбаев Ж. Б.

Казакбаев Жандос Бектореевич / Kazakbayev Zhandos Bektoreevich – магистрант,
кафедра общей и теоретической физики, физико–технический факультет,
Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан

Аннотация: *в статье рассматривается уравнение Эйнштейна. Общая теория относительности Эйнштейна, соединившая гравитацию со специальной теорией относительности, произвела революцию в наших представлениях о пространстве и времени. Выйдя за пределы законов Ньютона, она раскрыла перед нами Вселенную черных дыр, кротовых нор и гравитационных линз. Уравнение Эйнштейна с тензором энергии – импульса материи является неоднородным нелинейным дифференциальным уравнением. Его решения определяют гравитационные поля материальной среды. В данной статье мы рассмотрим общий вид уравнения Эйнштейна и его свойства. Рассмотрена также краткая история создания общей теории относительности гравитационного поля.*
Ключевые слова: *уравнение Эйнштейна, гравитационное поле, пространство – время.*

УДК 524.83

Введение

Нашей наукой сто лет назад было произведено неповторимое открытие в сфере естественных наук. Максвелл обьединил силы электричества и магнетизма, показав, что свет является проявлением такого единства. Это стало началом новой эры развитии науки и техники и новых теоретических поисков. Со временем, в 1905 г. Эйнштейн обьединил понятия пространства и времени, а через одиннадцать (1916 г.) лет он же показал, что Ньютоновская гравитация является проявлением этого обьединения, а именно описывается кривизной единого пространственно–временного многообразия. Так наука обогатилась гениальным открытием - ОТО. После создания ОТО возникла идея применить теорию к описанию Вселенной в целом [1]. Эйнштейн хотел построить единую теории поля на основе ОТО и исследовал эту теорию до конца жизни. В общем уравнения Эйнштейна – уравнения гравитационного поля в общей теории относительности, связывающие между собой метрику искривленного пространства – времени со свойствами заполняющей его материи.

Выглядят уравнения Эйнштейна следующим образом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

где $R_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, получающийся из тензора кривизны пространства – времени $R_{\rho\mu\sigma\nu}$ посредством свёртки его по паре индексов.

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \qquad (2)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad (3)$$

R - скалярная кривизна свёрнутая с дважды контравариантным метрическим тензором $g^{\mu\nu}$ и тензором Риччи. $T_{\mu\nu}$ -представляет собой тензор энергии – импульса материи, c - скорость света в вакууме, π - число Пи, G - гравитационная постоянная Ньютона. Тензор $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}$ называют тензором Эйнштейна.

1. Свойства уравнения Эйнштейна

Сформулируем в этом разделе основные общие свойства уравнений Эйнштейна - $R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$, которые необходимо иметь ввиду при конкретных задач:

1. Уравнения Эйнштейна представляют собой систему 10 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно компонент римановой метрики g. Физическую природу нелинейности можно пояснить следующим образом. Согласно основной идее ОТО гравитационное поле порождается любым видом энергии. Но гравитационное поле само обладает энергией [2]. Таким образом, гравитация может порождать саму себя, что и выражается нелинейностью

уравнений. Отсюда, в частности, следует невыполнимость принципа суперпозиции: сумма двух решений уравнений Эйнштейна уже, в общем случае, не будет решением этих уравнений. Однако в случае слабых гравитационных полей, принцип суперпозиции приближенно выполняется.

2. Десять уравнений Эйнштейна удовлетворяют четырем тождествам, поэтому, на самом деле, независимых уравнений оказывается только шесть, из которых можно найти лишь шесть из десяти компонент метрики. Оставшийся произвол отражает свойство общей ковариантности ОТО: четыре из десяти компонент метрики в каждой точке можно приписать произвольные значения за счет надлежащего подбора четырех функций $x' = f(x)$ общих координатных преобразований. Таким образом, гравитационное поле в общем случае обладает шестью независимыми физическими степенями свободы. Иногда оставшиеся координатные степени свободы по аналогии с электромагнитной теорией называют калибровкой.

3. Прямая задача ОТО заключается в задании типа источника гравитационного поля и, как правило, типа его симметрии (аксиальная, сферическая, плоская, однородное пространство и т.д.). Для каждого типа симметрии, как правило, существует система координат, в которой метрика записывается наиболее просто. Составляя для такого максимально простого вида метрики систему уравнений Эйнштейна, мы получаем конкретную систему нескольких дифференциальных уравнений в частных производных или даже обыкновенных дифференциальных уравнений, которые затем необходимо решать относительно компонент метрики. Ввиду нелинейности уравнений, стандартные методы математической физики в большинстве случаев не работают, поэтому для интегрирования уравнений Эйнштейна часто приходится использовать специальные технические приемы [3].

4. Уравнения Эйнштейна вне источника, то есть в точках пространства-времени, где $T = 0$, принимают следующий универсальный вид:

$$R_{\mu\nu} = 0. \qquad (1.1)$$

В отличие от электродинамики Максвелла ввиду нелинейности уравнений $R_{\mu\nu} = 0$ никакого общего решения этих уравнений, аналогичного разложению свободного электромагнитного поля по плоским волнам, неизвестно.

5. Уравнения $G = \chi T$ допускают другие эквивалентные формы записи.

6. С точки зрения последовательного применения принципа геометризации, ОТО не является законченной теорией, поскольку правая часть уравнений Эйнштейна – тензор энергии-импульса источника гравитации - остается негеометризованной. На это обстоятельство неоднократно обращал внимание сам Эйнштейн [4].

2. Вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа

В 1916 г., через пару недель после публикации основополагающей работы Эйнштейна, в которой были впервые записаны уравнения ОТО, Д. Гильберт опубликовал статью, в которой эти уравнения были выведены из вариационного принципа [5]. Поэтому иногда уравнения гравитационного поля ОТО называются уравнения Эйнштейна и Гильберта. Для вывода уравнений Эйнштейна действие зададим в виде

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2k}(R - \Lambda) + L_m \right] \qquad (2.1)$$

Для вывода уравнений Эйнштейна необходимо варьировать выражение (2.1)

$$\delta S = 0 \qquad (2.2)$$

Некоторые известные выражения, которые мы будем использовать:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(g_{\mu\nu} \cdot \delta g^{\mu\nu}), \qquad (2.3)$$

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}, \qquad (2.4)$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}, \qquad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2k}\delta(\sqrt{-g}R) - \delta(\sqrt{-g}\Lambda) + \delta(\sqrt{-g}L_m) \right] = \\ &= \int \left[\frac{1}{2k} R \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2k}\sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \Lambda \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + L_m \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g}\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \cdot \delta g^{\mu\nu} d^4x = \\ &= \int \left[\frac{1}{2k} \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2k}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\Lambda}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \cdot \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \\ &= \int \left[\frac{1}{2k}(-R\frac{1}{2}g^{\mu\nu}) + \frac{1}{2k}R_{\mu\nu} - \Lambda((-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}) \right] \cdot \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \end{aligned} \qquad (2.7)$$

В силу вариационного принципа, чтобы найти уравнение движения, мы приравняем к нулю подынтегральное выражение

$$\frac{1}{2k}R_{\mu\nu} - \frac{1}{4k}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{2k}g_{\mu\nu}\Lambda - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0, \qquad (2.8)$$

Чтобы упростить уравнение, мы умножим обе части выражения (2.8) на некоторую константу *2k,* тогда получим

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda, \qquad (2.9)$$

где $k = \frac{8\pi G}{c^4}$;

Уравнение (2.9), которое нами было получено, называется – *Уравнение Эйнштейна для гравитационного поля*

Заключение

Данная статья не содержит каких-либо новых практических результатов, пригодных для использования в теории относительности, космологии или астрофизике. Мы живём в современном мире, где наука и техника неустанно развиваются, в том числе и наука астрофизика не отстает от хода развитии. Таким образом, раздел астрономии – космология, которая изучает свойства и эволюцию Вселенной в целом, изо дня в день развивается. Существенную роль в космологии играет ОТО и уравнения Эйнштейна гравитационного поля. Уравнения Эйнштейна широко используются для вывода других уравнении и изучения метагалактики. Уравнения Эйнштейна появились в начале XX века и породили немалого шума, также предопределили дальнейший ход развития космологии.

В заключение можем сказать, что идеи Эйнштейна открыли новые пути изучения Вселенной и дали новый стимул старой астрономической науке.

Литература

1. Некоммерческое Партнерство Региональный Научно–образовательный Центр «ЛОГОС». «Введение в ОТО» Ярославль, 2009, С. 183-197.
2. *Жук Н. А*. Космология. – Харьков: ООО «Модель Вселенной», 2000, 464 с.
3. *Фок В. А*. Теория пространства, времени и тяготения. Москва: Физматгиз, 1961. 564 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Москва: Наука, 1988. С. 334-376.