О НОВОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБЩЕРАСПРОСТРАНЕННЫХ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ В УСЛОВИЯХ РЕАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Андреев В. О.[1], Тиняков Е. С.[2]

[1]Андреев Владимир Олегович - кандидат технических наук, директор,
Центр научно-технических программ,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел;
[2]Тиняков Евгений Сергеевич - магистрант,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российский государственный университет нефти и газа
Национальный исследовательский университет им. И. М. Губкина, г. Москва

Аннотация: *многие инженерные и экономические задачи связаны с исследованием линейных и нелинейных динамических систем с запаздыванием. В статье рассматриваются методы моделирования систем с запаздыванием на основе дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Рассмотрены процедуры сведения дифференциально-разностных моделей с запаздыванием к чисто дифференциальным уравнениям. Отмечается, что при таком методе аппроксимации возможна потеря качественных свойств поведения системы с запаздыванием. Представлены результаты численного дифференциально-разностного моделирования для различных вариантов и показано существенное влияние величины параметра запаздывания на сложную динамику системы.*
Ключевые слова: *моделирование, запаздывание, дифференциальные уравнения, нелинейная система.*

A NEW APPROACH TO ANALYSIS OF DIFFERENCE-DIFFERENTIAL MODEL WITH THE USE OF COMMON MINERAL RESOURCES IN ACTUAL MANUFACTURE

Andreyev V.[1], Tinyakov E.[2]

[1]Andreyev Vladimir - PhD, Director,
CENTER OF SCIENTIFIC AND TECHNICAL PROGRAMS, OREL STATE TECHNICAL UNIVERSITY, OREL
[2]Tinyakov Evgeny - undergraduate,
RUSSIAN STATE UNIVERSITY OF OIL AND GAS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY. I. M. GUBKIN, MOSCOW

Abstract: *many engineering and economic problems are related to the study of linear and nonlinear dynamic systems with delay. The article deals with systems with delay modeling techniques on the basis of differential and difference-differential equations. Article also highlights procedures transforming differential-difference models with delay into a purely differential equations. It is noted that such approximation method could entail qualitative losses in the properties of system with delay behavior of the system with delay. In addition articles demonstrates the results of numerical differential-difference simulation for various options as well as the significant delay parameter effect on the complex dynamics of the system.*
Keywords: *modelling, delay, differential dynamical systems, nonlinear system.*

УДК: 517.9

Одним из активно развивающихся направлений системной динамики являются исследования в области динамики систем с запаздыванием. Эти исследования стимулируют многочисленные прикладные задачи, при моделировании которых используются дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения и системы с запаздывающим аргументом. Модели подобного типа возникают, например, в электротехнике, лазерной оптике радиофизике, экономической макродинамике [1]. Изучению уравнений с запаздыванием посвящены многочисленные публикации, как теоретического, так и прикладного характера [2]. Тем не менее, в литературе слабо представлены приемлемые методы численного и графического представления дифференциально-разностных моделей для прикладных областей применения.

В работе исследуются методы решения линейных и нелинейных дифференциально-разностных моделей на примере следующих уравнений первого порядка [3]:

Модель 1: Линейное дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{dK}{dt} = K' = f(K, K(t-\tau) = aK(t) - bK(t-\tau) \qquad (1)$$

Модель 2: Нелинейное дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{dK}{dt} = K' = f(K, K-\tau) = aK(t) - bK(t-\tau) - \varepsilon K^3(t) \qquad (2)$$

Здесь:

a,b – произвольные вещественные параметры ($a \geq 0, b \geq 0$);

τ - интервал запаздывания ($\tau \geq 0$);

ε - малый параметр ($\varepsilon \to 0$).

Известно [4], что даже незначительное изменение времени запаздывания τ может привести к существенным изменениям в динамике системы. Поэтому особую важность приобретают вопросы моделирования уравнений (1) и (2) при различных значениях τ.

В разделе 1 при решении уравнений (1) и (2), в предположении малой величины интервала запаздывания, используется разложение в ряд Тейлора первого порядка для представления членов уравнения, содержащих параметр запаздывания τ. При этом, дифференциально-разностные уравнения сводятся, соответственно, к линейному и нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. В разделе 2 настоящей статьи используется разложение в ряд Тейлора второго порядка относительно τ, содержащих этот параметр членов уравнений (1) и (2). При этом получено решение соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка. Наконец, в третьем разделе анализируются результаты численного решения непосредственно исходных дифференциально-разностных уравнений. линейных и нелинейных моделей, при различных значениях параметров, в т.ч. при разной величине времени запаздывания.

1. Моделирование дифференциально-разностных уравнений с малым параметром запаздывания τ

Будем считать параметр τ малым, в таком случае, используем разложение в ряд Тейлора первого порядка, при этом получим:

$K(t-\tau) \sim K(t) - \tau K'(t)$,

и уравнения (1) и (2) можно записать, соответственно, в виде дифференциальных уравнений:

$$K'(t) = (a - b + b\tau)K(t) \qquad (3)$$

$$K'(t) = (a - b + b\tau)K(t) - \varepsilon K^3(t) \qquad (4)$$

При $c=a-b+b\tau$, тогда уравнения (3) и (4) принимают вид, соответственно:

$$K'(t) = cK(t) \qquad (5)$$

$$K'(t) = cK(t) - \varepsilon K^3(t) \qquad (6)$$

Динамика поведения независимой переменной в уравнениях (5) и (6) определяется тремя возможными условиями:

a) $c>0$, т.е. $(a-b+b\tau)>0$, или $\tau>(b-a)/b$.

b) $c=0$, т.е. $(a-b+b\tau)=0$.

c) $c<0$, т.е. $(a-b+b\tau)<0$, или $\tau<(b-a)$.

2. Моделирование функции запаздывания рядом Тейлора второго порядка

Функцию запаздывания $K(t-\tau)$ в уравнениях (1) и (2) можно аппроксимировать рядом Тейлора второго порядка относительно параметра запаздывания [5]:

$K(t-\tau) \sim K(t) - \tau K'(t) + (\tau^2/2)K''(t)$.

После некоторых очевидных преобразований уравнения (1) и (2) можно представить в виде соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка:

$$K''(t) = 2(a-b)(1/\tau^2)K(t) + 2(b\tau - 1)(1/\tau^2)K'(t) \qquad (7)$$

$$K''(t) = 2(a-b)(1/\tau^2)K(t) + 2(b\tau - 1)(1/\tau^2)K'(t) - \varepsilon(1/\tau^2)K^3(t) \qquad (8)$$

Динамика поведения моделей (7) определяется корнями характеристического уравнения [5]:

$$\lambda^2 - 2(b\tau-1)(1/\tau^2)\lambda - 2(a-b)(1/\tau^2) = 0 \qquad (9)$$

Дискриминант этого уравнения:

$$\Delta = 4\,(b\tau-1)^2(1/\tau^2)^2 - 8(a-b)(1/\tau^2) \qquad (10)$$

При этом, в зависимости от значения дискриминанта уравнения, имеются три возможных случая:

а) дискриминант уравнения положителен, есть два вещественных корня $\lambda_1=(1/2)\{2(b\tau-1)(1/\tau^2)+\Delta\}$ и $\lambda_2=(1/2)\{2(b\tau-1)(1/\tau^2)-\Delta\}$: общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$K(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

в) дискриминант равен нулю, имеется один двукратный корень: общее решение уравнения принимает вид:

$$K(t) = C_1 e^{((b\tau-1)/\tau^2)t} + C_2 t e^{((b\tau-1)/\tau^2)t}.$$

с) дискриминант уравнения отрицателен, имеются два комплексно сопряженных корня уравнения (9): общее решение уравнения имеет вид:

$$K(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

где $\alpha=(b\tau-1)(1/\tau^2)$; $\beta=(1/2)\mathrm{sqrt}\,(-\Delta)$.

3. Моделирование нелинейной динамики систем с запаздыванием дифференциально-разностными уравнениями

Авторами, с использованием функции NDSolve системы «MATHEMATICA» [6], реализован комплекс программных средств для численного решения дифференциально-разностных систем уравнений, позволяющий моделировать сложную динамику систем с запаздыванием [7]. Применение дифференциального и дифференциально-разностного инструментария позволяет провести моделирование систем с запаздыванием, используя изложенные в предыдущих разделах методы представления линейных и нелинейных моделей.

Однако, как показали наши исследования, сведение дифференциально-разностных моделей во многих случаях приводит к изменению качественной картины поведения системы, даже при небольших значениях параметра запаздывания. Это, в особенности, относится к случаю линейной модели (1), в то время как сведение уравнения (2) к дифференциальной модели представляется, несколько, более оправданным.

Результаты исследований показывают существенное влияние величины времени запаздывания τ на поведение независимой переменой K(t), как для линейной (1), так и для нелинейной дифференциально-разностной модели (2).

Список литературы / References

1. *Arino O.* (Ed.) Delay Differential Equations and Applications. M. Marrackech, 2006.
2. *Loiseau J. J.* (Ed.) Topics in Time Delay Systems: Analysis, Algorithms and Control. Springer, 2009.
3. *Keqin Gu, Silviu-Lulian N.* Advances in Time –Delay Systems. Springer, 2004.
4. *Perco L.* Differential Equations and Dynamical Systems. Soringer-Verlag. Berlin. 1991.
5. *Треногин В. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТГИЗ, 2009.
6. *Андреев В. О.* Программно-методический комплекс макродинамического моделирования сложных систем. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. М.: ФГУ ФИПС, 2010.