ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕСОВЫХ СУММ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СУПЕРМАРТИНГАЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Чан Сен Ир[1], Ри Ген Сик[2] Email: Jang1133@scientifictext.ru

[1]Чан Сен Ир - кандидат математических наук, преподаватель;

[2]Ри Ген Сик - доктор математических наук, профессор,

математический факультет,

Педагогический институт им. Ким Чхоль Чжу,

г. Пхеньян, Корейская Народно-Демократическая Республика

Аннотация: *показательное вероятностное неравенство часто используют в исследовании о зависимой или независимой последовательности случайных величин.*

Используя показательное вероятностное неравенство, получим асимпточные приближения о некоторых моментах зависимой или независимой последовательности случайных величин.

В статье результаты для частных сумм последовательностей случайных величин, рассмотренные в литературе, обобщены на результаты для весовых сумм (см. [1] - [4]).

Предположили, что условное ожидание имеет почти наверное ограниченность, доказали показательные вероятностные неравенства для почти наверное сходящегося числового ряда.

Ключевые слова: *показательное вероятностное неравенство, последовательность супермартингальных разностей, весовая сумма.*

EXPONENTIAL INEQUALITIES FOR WEIGHTED SUMS OF SUPERMARTINGALES DIFFERENCES

Jang Song Il[1], Li Gen Sik[2]

[1]Jang Song Il - master of mathematics, teacher,

[2]Li Gen Sik - doctor of mathematics, professor;

MATHEMATICS DEPARTMENT,

KIM CHOL JU EDUCATION COLLEGE,

PYONGYANG, DEMOCRATIC PEOPLE'S REPUBLIC OF KOREA

Abstract: *exponential probability inequality is often used in the study of dependent or independent sequences of random variables.*

Using an exponential probability inequality, we study the asymptotic approximation of some moments for dependent or independent sequences of random variables.

In this article the results of the partial sums of random variables sequences that were mentioned in [1] - [4] were generalized as the case of weighted sums of random variables sequences.

It was assumed that conditional expectative value would be almost certainly limitation and exponential probability inequalities for almost certainly convergent numerical series were certified.

Keywords: *exponential probability inequality, supermartingale sequence differences, weight amount.*

УДК 519.214.5

Пусть известны следующие:

$\{X_n,\ n\ge 1\}$ − последовательность случайных величин и $\left\{c_j(\alpha),\ j=1,2,\cdots;\ \alpha>0\right\}$ − положительная вещественная функциональная последовательность, заданная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ P)$.

Ещё $\{X_n,\ n\ge 1\}$ − измеримая случайная величина относительно F_k и семейство $(F_n)_{n\ge 0}$ − σ-алгеба, удовлетворяющая условию:

$\forall n,\ F_{n-1}\subset F_n\subset F_{n+1}$.

Предположим, что условное математическое ожидание $E_{j-1}\left(e^{tX_j}\right):=E\left(e^{tX_j}\middle|F_{j-1}\right)$ для j является ограниченным почти наверное и докажем показательные вероятностные неравенства для почти наверное сходящегося числового ряда $Z(\alpha):=\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\alpha)X_j$, где α −непрерывный или дискретный параметр, который может иметь $\alpha=n=1,\ 2,\ \cdots$.

Теорема 1. Пусть удовлетворяет следующее неравенство почти наверное для последовательности случайных величин $(X_n)_{n\ge 1}$:

$$E_{j-1}\left(e^{tX_j}\right)\le e^{\frac{1}{2}k_jt^2},\quad 0<t<T,\ \ j=1,2,\cdots, \tag{1}$$

где $(k_n)_{n\ge 1}$−положительная вещественная последовательность, T − постоянная(T >0).

Тогда если $\forall\alpha, j,\ \ c_j(\alpha)\le 1$, то

$$P(Z(\alpha)\ge x)\le\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2a(\alpha)}}, & 0<x<a(\alpha)T \\ e^{-\frac{Tx}{2}}, & x\ge a(\alpha)T\end{cases}, \tag{2}$$

или если $\sup_j c_j(\alpha)>1$, то

$$P\left(Z(\alpha)\ge x\right)\le\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2a(\alpha)}}, & 0<x<a'(\alpha)T \\ e^{-\frac{Tx}{2\sup_j c_j(\alpha)}}, & x\ge a'(\alpha)T\end{cases}, \tag{3}$$

где $a(\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}k_jc_j^2(\alpha)<\infty,\ \ a'(\alpha)=a(\alpha)\Big/\sup_j c_j(\alpha)$.

Доказательство. Сначала докажем, что удовлетворяет неравенство (2) при $\forall\alpha,\ j,\ \ c_j(\alpha)\le 1$.

Выберём любое положительное число x.

Тогда получаем следующее неравенство:

$$P(Z(\alpha)\ge x)=P\left(e^{tZ(\alpha)}\ge e^{tx}\right)=P\left(e^{tZ(\alpha)-tx}\ge 1\right)\le e^{-tx}E\left(e^{tZ(\alpha)}\right)=e^{-tx}E\left(e^{t\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\alpha)X_j}\right). \qquad (4)$$

Из условия (1) и неравенства $c_j(\alpha)\le 1$ получаем почти наверное следующее неравенство:

$$E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]=E\left[E\left(\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\middle|F_{n-1}\right)\right]$$

$$=E\left[E\left(\exp\{tc_n(\alpha)X_n\}\middle|F_{n-1}\right)\cdot\left(\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n-1}c_j(\alpha)X_j\right\}\right)\right]$$

$$\le E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}k_nc_n(\alpha)t^2\right\}\cdot\left(\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n-1}c_j(\alpha)X_j\right\}\right)\right].$$

Т.е. получаем неравенство:

$$E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]\le\exp\left\{\frac{1}{2}k_nc_n^2(\alpha)t^2\right\}\cdot E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n-1}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]. \qquad (5)$$

Если применяем вышеуказанный метод к второму множителю правой части, то получаем неравенство для $n-1$, похожее на (5).

Повторяя несколько раз вышеуказанный метод, получаем следующее неравенство:

$$E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]\le\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}k_jc_j^2(\alpha)t^2\right\}.$$

Думая о нижних пределах при $n\to\infty$ в двух частях этого неравенства, получаем:

$$\varliminf_{n\to\infty}E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]\le\varliminf_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}k_jc_j^2(\alpha)t^2\right\}. \qquad (6)$$

Тогда в левой части (6) $\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}$ − не отрицательное число.

Поэтому по лемме Фату получаем:

$$E\left[\varliminf_{n\to\infty}\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]\le\varliminf_{n\to\infty}E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right].$$

Ещё $\exp\{x\}$ − непрерывная функция, $\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\alpha)X_j$ − сходящийся ряд почти наверное.

Поэтому получаем почти наверное:

$$E\left[\underline{\lim}_{n\to\infty}\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j\left(\alpha\right)X_j\right\}\right]=\lim_{n\to\infty}E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j\left(\alpha\right)X_j\right\}\right]=E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\alpha\right)X_j\right\}\right]. \quad (7)$$

Отсюда левая часть в (7) обозначается через следующюю форму:

$$E\left[\underline{\lim}_{n\to\infty}\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]=E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\alpha)X_j\right\}\right].$$

Таким образом, левая часть в (6) оценивается следующей:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{n}c_j\left(\alpha\right)X_j\right\}\right]\geq E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\alpha\right)X_j\right\}\right]. \quad (8)$$

Из неравенства $\sum_{j=1}^{\infty}k_jc_j^2(\alpha)<\infty$ и непрерывности функции $\exp\{x\}$ правая часть в (6) обозначается через следующюю форму:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}k_jc_j{}^2\left(\alpha\right)t^2\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}k_jc_j{}^2\left(\alpha\right)\,t^2\right\}. \quad (9)$$

Из (6), (8) и (9) следующее неравенство справедливо:

$$E\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\alpha)X_j\right\}\right]\leq\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}k_jc_j^2(\alpha)t^2\right\}. \quad (10)$$

Из (4) и (10) получаем:

$$P(Z(\alpha)\geq x)\leq e^{\inf\limits_{0<t\leq T}\left[\frac{1}{2}a(\alpha)t^2-tx\right]}. \quad (11)$$

В правой части (11) для $f(t)=\frac{1}{2}a(\alpha)t^2-tx$ получаем:

$$f'\left(t\right)=a(\alpha)t-x\,,\quad f'\left(\frac{x}{a(\alpha)}\right)=0\,.$$

Поэтому при $T\geq\frac{x}{a(\alpha)}$ для постоянной точки x ($x>0$) получаем

$$\inf_{0<t<T}f\left(t\right)=f\left(\frac{x}{a\left(\alpha\right)}\right)=-\frac{x^2}{2a\left(\alpha\right)}\,, \quad (12)$$

а при $T\leq\frac{x}{a(\alpha)}$

$$\inf_{0<t<T}f\left(t\right)=f\left(T\right)=\frac{1}{2}a\left(\alpha\right)T^2-Tx=\frac{1}{2}a\left(\alpha\right)T\cdot T-Tx\leq\frac{1}{2}Tx-Tx=-\frac{Tx}{2}\,. \quad (13)$$

(см. [1])

Из (11), (12), (13) справедливо неравенство (2) для функциональной последовательности $\left(c_j\left(\alpha\right)\right)$, удовлетворенной $c_j\left(\alpha\right) \le 1$.

Очевидно, что из (2) справедливо (3) при $\sup\limits_j c_j\left(\alpha\right) > 1$.

Теорема 1 доказана.

Эта теорема является обобщением теоремы 2.1, которую доказали в [4].

Из теоремы 1 можно получить больше увеличенное показанное вероятностное неравенство.

Следствие 1. Пусть удовлетворяет слелующее условие для последовательности случайных величин $(X_n)_{n\ge1}$, положительного числа T и некоторого вещественной последовательности $(K_n)_{n\ge1}$:

$$E_{n-1}\left[e^{tX_j}\right] \le e^{\frac{1}{2}k_j t^2}, \quad |t| \le T, \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{14}$$

Тогда для функциональной последовательности $(c_j(\alpha))$, удовлетворенной

$\forall\alpha,\ j,\ c_j\left(\alpha\right) \le 1,$

справедливы

$$P(Z(\alpha) \le -x) \le \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2a(\alpha)}}, & 0 < x \le a(\alpha)T \\ e^{-\frac{Tx}{2}}, & x \ge a(\alpha)T \end{cases}, \tag{15}$$

$$P\left(\left|Z\left(\alpha\right)\right| \ge x\right) \le \begin{cases} 2e^{-\frac{x^2}{2a(\alpha)}}, & 0 < x \le a\left(\alpha\right)T \\ 2e^{-\frac{Tx}{2}}, & x \ge a\left(\alpha\right)T \end{cases}, \tag{16}$$

а для функционального ряда $(c_j(\alpha))$, удовлетворенного $\sup\limits_j c_j\left(\alpha\right) > 1$,

$$P\left(Z\left(\alpha\right) \le -x\right) \le \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2a(\alpha)}}, & 0 < x \le a'\left(\alpha\right)T \\ e^{-\frac{Tx}{2\sup\limits_j c_j(\alpha)}}, & x \ge a'\left(\alpha\right)T \end{cases}, \tag{17}$$

$$P\left(\left|Z\left(\alpha\right)\right| \ge x\right) \le \begin{cases} 2e^{-\frac{x^2}{2a'(\alpha)}}, & 0 < x \le a'\left(\alpha\right)T \\ 2e^{-\frac{Tx}{2\sup\limits_j c_j(\alpha)}}, & x \ge a'\left(\alpha\right)T \end{cases}. \tag{18}$$

Доказательство. Очевидно, что справедливо следующее равенство:

$$P(Z(\alpha)\le -x)=P(-Z(\alpha)\ge x)=P\left[\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\alpha)(-X_j)\ge x\right].$$

Далее из (14) получаем:

$$\forall t\in(0,\ T),\ E_{j-1}\left[e^{t(-X_j)}\right]=E_{j-1}\left[e^{(-t)X_j}\right]\le e^{\frac{1}{2}k_jt^2}.$$

Из (2) теоремы 1 справедливо неравенство (15) при $c_j(\alpha)\le 1$ и из (3) теоремы 1 справедливо (17).

Следовательно, из (3) теореры 1 и (17) получаем (18).

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Пусть удовлетворяет слелующее условие для независимая последовательности случайных величин $(X_n)_{n\ge1}$, положительного числа T и некоторого вещественной последовательности $(K_n)_{n\ge1}$:

$$E\left[e^{tX_j}\right]\le e^{\frac{1}{2}k_jt^2},\quad |t|\le T,\quad j=1,2,\cdots \qquad (19)$$

Тогда справедливо (15).

Доказательство. Если $(X_n)_{n\ge1}$ является независимой последовательностей случайных величин, справедливо равенство:

$$E_{j-1}\left[e^{tX_j}\right]=E\left(e^{tX_j}\right).$$

Поэтому из следствии 1 получаем (15).

Следствие 2 доказано.

Теорема 2. Пусть для последовательноси мартингальных разностей $(X_n)_{n\ge1}$ и некоторой положительной постоянной k удовлетворяет почти наверное:

$$\forall j\ge1,\ E_{j-1}\left[e^{|X_j|}\right]\le k/4. \qquad (20)$$

Тогда справедливы (15)~(18).

Доказательство. Выберём любой параметр $t\in[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$.

Из условия теоремы получаем почти наверное:

$$E_{j-1}\left[\exp\left\{tX_j\right\}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}t^iE_{j-1}\left(\frac{X_j^{\,i}}{i!}\right)=1+tE_{j-1}\left(\frac{X_j}{1!}\right)+t^2E_{j-1}\left(\frac{X_j}{2!}\right)^2+\cdots$$

$$\le 1+\sum_{i=2}^{\infty}|t|^iE_{j-1}\left(e^{|X_j|}\right)\le 1+\frac{k}{4}\frac{t^2}{1-|t|}\le\exp\left\{\frac{kt^2/4}{1-|t|}\right\}\le e^{\frac{1}{2}kt^2}.$$

В следствии 1 при $k_j=k$ справедливо (14).

Поэтому при $T=\dfrac{1}{2}$ справедливы (15) ~ (18).

Теорема 2 доказана.

Следствие 3. Пусть $(X_n)_{n\ge1}$ – независимая последовательность случайных величин, удовлетворяющая

$E(X_n)=0$ для любого числа n.

Если выполнено условие

$$E\left[e^{|X_j|}\right]\le k/4, \qquad (21)$$

то справедливы следующие неравенства:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\ge x\right)\le\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{-nx^2}{2k}\right\}, & 0<x\le\dfrac{1}{n}kT\\ e^{-\frac{1}{2}Tx}, & x\ge\dfrac{1}{n}kT\end{cases}, \qquad (22)$$

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}X_j\right|\ge x\right)\le\begin{cases}2\exp\left\{\dfrac{-nx^2}{2k}\right\}, & 0<x\le\dfrac{1}{n}kT\\ 2\exp\left\{-\dfrac{1}{2}Tx\right\}, & x\ge\dfrac{1}{n}kT\end{cases}. \qquad (23)$$

Доказательство. Предположим, что в теореме 2

$$\alpha=n \text{ и } c_j(\alpha)=c_j(n)=\begin{cases}n^{-1}, 1\le j\le n\\ 0,\ j>n\end{cases}.$$

Тогда справедливо:

$$\sup_j c_j(n)=\frac{1}{n}\le1.$$

С другой стороны, если удовлетворяет (21), то может справедливо (20).
Поэтому из теоремы 2 справедливы (22), (23).
Следствие 3 доказано.

Теорема 3. Пусть для последовательноси супермартингальных разностей $(X_n)_{n\ge1}$ выполнено следующее условие:

$$E_{j-1}X_j{}^m\le\frac{m!}{2}\sigma_j{}^2h^{m-2},\quad j=1,2,\cdots,\ m\ge2,\ h>0. \qquad (24)$$

Если для функциональной последовательности $\left(c_j(\alpha)\right)$ удовлетворяет

$$\forall\alpha,\ j,\ \ c_j(\alpha)\le1,$$

то

$$P\left(Z(\alpha)\geq x\right)\leq\begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4b(\alpha)}\right\}, & 0<x\leq\dfrac{b(\alpha)}{h}\\ \exp\left\{-\dfrac{x}{4h}\right\}, & x>\dfrac{b(\alpha)}{h}\end{cases},\tag{25}$$

$$P\left(\left|Z(\alpha)\right|\geq x\right)\leq\begin{cases}2\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4b(\alpha)}\right\}, & 0<x\leq\dfrac{b(\alpha)}{h}\\ 2\exp\left\{-\dfrac{x}{4h}\right\}, & x>\dfrac{b(\alpha)}{h}\end{cases},\tag{26}$$

но если $\sup\limits_j c_j\left(\alpha\right)\geq 1$, то

$$P\left(Z(\alpha)\geq x\right)\leq\begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4b(\alpha)}\right\}, & 0<x\leq\dfrac{b'(\alpha)}{h}\\ \exp\left\{-\dfrac{x}{4h\sup\limits_j c_j(\alpha)}\right\}, & x>\dfrac{b'(\alpha)}{h}\end{cases},\tag{27}$$

$$P\left(\left|Z(\alpha)\right|\geq x\right)\leq\begin{cases}2\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4b(\alpha)}\right\}, & 0<x\leq\dfrac{b'(\alpha)}{h}\\ 2\exp\left\{-\dfrac{x}{4h\sup\limits_j c_j(\alpha)}\right\}, & x>\dfrac{b'(\alpha)}{h}\end{cases},\tag{28}$$

где

$$b(\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2(\alpha)\sigma_j^2,\quad b'(\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2(\alpha)\sigma_j^2\Big/\sup_j c_j\left(\alpha\right).$$

Доказательство. Доказательство основано на применении формулы Маклорена:

$$e^{tX_j}=1+\frac{1}{1!}tX_j+\frac{1}{2!}(tX_j)^2+\frac{1}{3!}(tX_j)^3+\cdots.$$

Думая об условном математическом ожиданием для F_{j-1}, получаем:

$$E_{j-1}\left(e^{tX_j}\right)=1+E_{j-1}\left(tX_j\right)+E_{j-1}\left(\frac{t^2}{2}X_j^2\right)+E_{j-1}\left(\frac{t^3}{6}X_j^3\right)+\cdots$$

$$=1+tE_{j-1}(X_j)+\frac{t^2}{2}E_{j-1}\left(X_j^2\right)+\frac{t^3}{6}E_{j-1}\left(X_j^3\right)+\cdots.$$

Легко проверить справедливость следующего неравенства:

$E_{j-1}(X_j)\leq 0$, почти наверное.

Потому что $(X_n)_{n\ge1}$ является последовательностей супермартингальных разностей.

Поэтому из условия (24) получаем:

$$E_{j-1}\left(e^{tX_j}\right)\le 1+\frac{t^2}{2}\sigma_j^2+\frac{t^3}{6}\cdot\frac{3!}{2}\sigma_j^2 h+\cdots\le 1+\frac{t^2}{2}\sigma_j^2+\frac{t^3}{2}\sigma_j^2 h+\cdots\le 1+\frac{t^2}{2}\sigma_j^2(1+h|t|+h^2t^2+\cdots).$$

Таким образом, при $|t|<T=\frac{1}{2h}$ справедливо:

$$1<\frac{1}{1-h|t|}<2.$$

Поэтому справедливо почти наверное:

$$E_{j-1}e^{tX_j}\le 1+\frac{t^2\sigma_j^2}{2}\cdot\frac{1}{1-h|t|}\le 1+t^2\sigma_j^2\le e^{\sigma_j^2t^2}.$$

Следовательно, при $k_j=2\sigma_j^2$ выполнено:

$$E_{j-1}e^{tX_j}\le e^{\frac{1}{2}k_jt^2}.$$

Т.е. в следствии 1 справедливо (14).

Поэтому в следствии 1 справедливы (15) ~ (18) для $a(\alpha)$ и T, которые соответственно удовлетворяют:

$$a(\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j^{\ 2}(\alpha)k_j=2\sum_{j=1}^{\infty}c(\alpha)_j^{\ 2}\sigma_j^{\ 2}=2b(\alpha),\ T=\frac{1}{2h}.$$

Таким образом, справедливы (25) ~ (28) и теорема 3 доказана.

Из теоремы получаем следующее следствие.

Следствие 4. Пусть выполнено (24) для последовательноси супермартингальных разностей $(X_n)_{n\ge1}$.

Тогда для любого x ($x>0$)

$$P\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\ge x\right)\le\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{4g_n^2}}, & 0<x\le\dfrac{g_n^2}{h}\\ e^{-\frac{x}{4h}}, & x>\dfrac{g_n^2}{h}\end{cases},\qquad(29)$$

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{n}X_j\right|\ge x\right)\le\begin{cases}2e^{-\frac{x^2}{4g_n^2}}, & 0<x\le\dfrac{g_n^2}{h}\\ 2e^{-\frac{x}{4h}}, & x>\dfrac{g_n^2}{h}\end{cases},\qquad(30)$$

где $g_n{}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$.

Доказательство. Если в теореме 3 $\alpha = n = 1, 2, \cdots$ и

$$\forall j, \quad c_j(n) = \begin{cases} 1, & j \le n \\ 0, & j > n \end{cases},$$

то $c_j(\alpha) \le 1$.

Поэтому из теоремы 3 справедливы (29), (30).
Следствие 4 доказано.

Известно, что для отрицательная зависимая последовательность случайных величин $(X_n)_{n\ge1}$ при

$$\left| EX_j^m \right| \le \frac{m!}{2} \sigma_j^2 h^{m-2}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

справедливо (30). (см. [4])

Поэтому для независимой последовательности случайных величин $(X_n)_{n\ge1}$ при условии

$\forall n, \ EX_n = 0$ результат следствия 4 совпадает с результатом [4].

В этой статье мы дадим расширения неравенства Бернштейна и Хофдинга на весовых сумм супермартингалых разносцей.

Список литературы / References

1. *Christofide, T.C., Hadjikyriakou M.,* Exponential inequalities for N –demimartingales and negatively associated random variables. Statist.Probab. Lett. 79, 2009. 2060-2065.
2. *Hadjikyriakou Milto*. Marcinkiewicz–Zygmund inequality for nonnegative $N-$ demimartingales and related results. Statist. Probab. Lett. 81, 2011. 678-684.
3. *Quansheng Liu, Frederique Watbled,* Exponential inequalities for martingales and asymptotic properties of the free energy of directed polymers in a random environment.Stochastic Process. Appl. 119.,2009. 3101-3132.
4. *Wang X.J., Hu S.H., Yang W.Z., Ling N.X.,* Exponential inequalities and inverse moment for NOD sequence. Statist.Probab. Lett. 80, 2010. 452 - 461.