

Численные методы решения нелинейных уравнений как обучающий инструмент Куленко Н. А.

Куленко Наталина Александровна / Kulenko Natalina Aleksandrovna – студент,
факультет экономики, менеджмента и бизнес-информатики,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Пермский филиал), г. Пермь

Аннотация: в статье рассматриваются методы приближенного вычисления нелинейных уравнений с одним неизвестным в качестве инструмента обучения. На языке Pascal реализуются четыре метода: дихотомии, касательных, хорд и простых итераций. Проводится сравнение их эффективности с точки зрения скорости работы, посредством подсчета количества итераций, необходимых для нахождения корней. Результаты исследования могут быть использованы как наглядный методический материал для студентов и школьников инженерных направлений.

Ключевые слова: методы обучения, эффективность, численные методы, нелинейные уравнения, метод дихотомии, метод хорд, метод простых итераций, метод касательных, ЭВМ.

Интерес к задаче поиска корней нелинейного уравнения с одним неизвестным появился много веков назад, однако не теряет свою актуальность и на сегодняшний день. В подавляющем большинстве случаев реализовать вычисление выражения в виде конечной формулы оказывается невозможным. Согласно теореме Абеля, даже для простейшего алгебраического уравнения пятой и более степеней нельзя найти точного решения. В таких случаях прибегают к тем или иным методам приближенного вычисления [1]. Решение таких уравнений имеет широкое практическое применение в разделах физики, в частности, физических экспериментах, а также различных областях химии, биологии и других вопросах науки. В то же время развитие вычислительной техники неуклонно набирает обороты, инженерная практика постоянно сталкивается с задачами, которые требуют построения математической модели, а она, в свою очередь, решения математической задачи, которая может быть решена только с помощью численных методов. Такие методы, как правило, реализуются на ЭВМ. Поэтому важно уметь оценивать их качество и эффективность.

Для студентов и школьников инженерных направлений в программе присутствует знакомство с методами приближенного вычисления корня нелинейных уравнений. Основной целью таких учебных методик является развитие представлений о применениях ЭВМ для научно-технических расчетов [3]. Для формирования общих представлений используется самый простой для понимания - метод дихотомии. Но можно ли останавливаться только на изучении и применении одного метода? Является ли он достаточно эффективным, если является наиболее интуитивно понятным и простым? Изобилие теоретического материала позволяет найти ответ на этот вопрос, однако материал, полученный эмпирическим путем и с использованием конкретных примеров, усваивается гораздо лучше. Таким образом, актуально сравнить скорость работы метода дихотомии и других методов приближенного вычисления уравнений и получить результат на конкретных числовых характеристиках.

Объектом исследования являются численные методы вычисления нелинейных уравнений, а предметом является сравнение скорости их работы.

Проверка будет проводиться с помощью программирования алгоритма данных методов на языке Pascal ABC, в которых будет производиться подсчет количества итераций до получения приближенного значения заданной точности.

На сегодняшний день разработано множество методов приближенного решения нелинейных уравнений, таких как метод дихотомии, метод хорд, метод касательных, метод парабол, метод простых итераций, а также существует огромное количество их модификаций и комбинаций. Каждый такой метод рассматривается на определенном отрезке, и результатом вычисления является приближенное значение корня в зависимости от заданной допустимой погрешности [2].

Помимо наиболее популярного метода дихотомии (метода половинного деления), в исследовании рассматривается вычисление методами: хорд, касательных, простых итераций. Каждый из методов рассматривается на примере функции $y(x)$, которая вычисляется по формуле

$$e^{x+\ln 2} + 5 * x - 3 = y(x)$$

Каждый метод рассматривается на отрезке $[-20; 5]$. Итерации продолжаются до предельной абсолютной погрешности, равной 0.0001.

График функции на рассматриваемом промежутке имеет вид, представленный на рисунке 1:

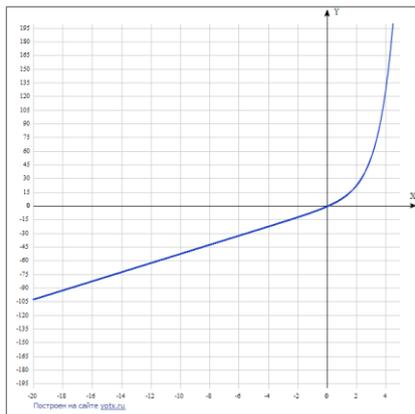


Рис. 1. Исследуемая функция

Корень находится на отрезке $[0; 1]$ (см. рис. 2).

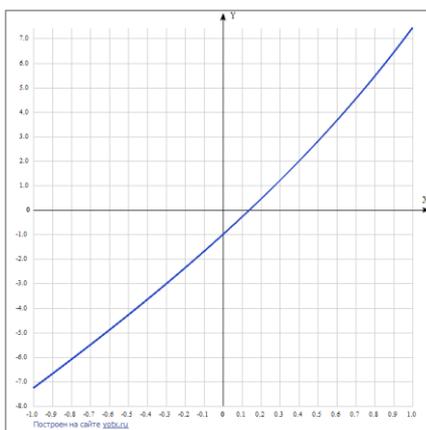


Рис. 2. Корень функции

По каждому из вышеуказанных методов был изучен теоретический материал, и на его основе реализован алгоритм вычисления каждого метода, где входными данными являются границы отрезка, а выходными приближенное значение корня x и количество итераций k , выполненных для его нахождения. Для каждого метода есть определенные недостатки, ограничения или трудности, но было рассмотрено, что все они были учтены, в частности, для метода хорд и касательных в качестве начального приближения задается верный конец отрезка, а для метода простых итераций правильно выбран коэффициент [2].

Полученные результаты для x и k каждого метода отражены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты вычисления методов

Название метода	Заданная точность (E)	Корень (x)	Количество итераций (k)
Метод дихотомии	0.0001	0.139932632446289	18
Метод хорд	0.0001	0.139879126027977	13
Метод касательных	0.0001	0.139924991354786	5
Метод простых итераций	0.0001	0.139912636864991	8

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что быстрее всего сходится метод касательных, а метод дихотомии работает дольше всего.

Таким образом, получено, что самый простой способ для реализации и понимания является самым неэффективным с точки зрения скорости работы. Разумеется, каждую проблему мы пытаемся решить самым простым для понимания и затрате сил способом. Однако такой подход не всегда оказывается эффективным, в особенности для IT специалистов, для которых он может стать даже критичным, так,

мнимая простота реализации может увеличить время выполнения программы до неоправданных промежутков. Разумеется, для программистов существует еще множество других критериев, в частности, точности вычислений или затрачиваемой памяти. Все это важно учитывать программисту при выборе алгоритма. Поэтому численные методы для приближенного вычисления нелинейных уравнений могут стать прекрасным инструментом обучения как наглядный пример того, что простая логика и короткий алгоритм могут быть самыми неэффективными для работы программы.

Литература

1. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. - Томск: МП «РАСКО», 1991. – 11-39 с.
2. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Конченлова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 78-80 с.
3. *Egelhoff C. J., Blackletter D. M., Benson J. L.*. «Algorithms for solving nonlinear equation systems assist students to become better problem solvers», 2013 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE), pp. 12A4/17-12A4/22vol. 1, Frontiers in Education Conference, 1999. FIE '99. 29th Annual, 1999.