Поиск особых положений в теории механизмов
Кененбаева Г. М.[1], Касымова Т. Дж.[2]

[1]*Кененбаева Гулай Мекишовна / Kenenbaeva Gulai Mekishovna - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и информатики;*
[2]*Касымова Тумар Джапашевна / Kasymova Tumar Japashevna – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры, геометрии и топологии,*
факультет математики, информатики и кибернетики,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек

Аннотация: *предложено применение полученных результатов [6], [10], [11] для широкого круга прикладных задач, среди которых весьма актуальными являются задачи в теории механизмов. Сформулированы определения особых положений в теории механизмов.*
Ключевые слова: *явление, эффект, теория механизмов.*

Введение.

На основе результатов, полученных в [6], [10] и определений 1-2 в [6], [11] для математических задач, отражающих реальные процессы или объекты, возникает гипотеза о существовании «эффекта» или «явления» в реальности, и математический результат дает указание на условия, при которых это может осуществиться. Как отмечено в [2], раздел 2.1, поскольку дисплей – реальный объект, компьютерное представление математического результата уже указывает на возможность его реализации.

Ниже приведены исследования явлений, а также анализ новых эффектов и явлений, которые можно наблюдать в данной области.

1. Обзор результатов и определений по теории механизмов

Важным приложением математических методов является теория механизмов и машин, где тоже могут возникать различные явления. В данном обзоре мы ограничимся неподвижными механизмами (статика). Мы будем рассматривать их как конечные множества F фиксированных точек на плоскости или в пространстве и конечные множества V точек, которые могут менять свое положение (изменение положения мы будем рассматривать не как реальное движение механизма, а как переход к другому положению механизма). При этом для точек из этих множеств заданы ограничения в виде равенств и неравенств, как в [1], [3]. В частности, могут быть заданы расстояния между некоторыми точками (длины стержней), а также требования, чтобы некоторые точки находились на стержнях между двумя другими точками (кулисы).

Для единообразного представления механизмов Ж.-Л. Лагранж (1788 г.) ввел понятие «обобщенные координаты» – независимые между собой величины, однозначно определяющие положение системы. В таком смысле это понятие и вошло в физику, его и сейчас применяют в механике [3], [7].

Как известно, в получающихся таким образом шарнирных и кулисных механизмах бывают «обычные» и «особые» положения, см., например, [1], [3], [7]. В частности, с точки зрения статики особые положения определяются усилением напряжений в деталях конструкции, бифуркациями. Тогда возникает бесконечная сила или сжатие.

«Под *особым положением* механизма понимается расположение звеньев механизма, при котором происходит изменение его структуры (переменность структуры), заключающееся либо в появлении неуправляемой подвижности (нарушается определенность движения), либо в исчезновении степеней свободы (возникают «мертвые точки»). За *критерий особого положения в механизмах без зазоров* обычно принимается нулевое значение определителя матрицы Якоби, выявляющее только один частный случай нулевого особого положения …» [7].

Отсюда видно, что ранее не существовало единообразного определения особых положений, возникает задача сформулировать и реализовать такое определение.

2. Исследования особых положений в теории механизмов

Рассмотрим механизм, имеющий параметры (вещественные числа)

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+m}, \quad (1)$$

причем числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – обобщенные координаты механизма, а числа (фактические координаты) $q_{n+1}, \ldots, q_{n+m}$ выражаются через них:

$$\begin{aligned} &q_{n+1} = Q_1(q_1, q_2, \ldots, q_n);\\ &\ldots \qquad (2)\\ &q_{n+m} = Q_m(q_1, q_2, \ldots, q_n). \end{aligned}$$

Придадим одной из обобщенных координат q_j приращение ε, тогда все зависимые переменные получат приращения

$$\begin{aligned} &\Delta q_{n+1,\, j}(\varepsilon) = Q_1(q_1, q_2, \ldots\, q_j+\varepsilon, q_n) - Q_1(q_1, q_2, \ldots, q_n);\\ &\ldots \qquad (3) \end{aligned}$$

$\Delta q_{n+m,\,j}(\varepsilon)=Q_m(q_1, q_2, \ldots q_j+\varepsilon, q_n) - Q_m(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Введем

Определение 3**.** Если все функции $\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon), k = 1..n;\ j = 1..m$ дифференцируемы по ε и значения производных отличны от нуля, то такое положение будем называть обычным. Во всех остальных случаях – особым.

Определение 4**.** Если все возможные положения механизма являются особыми, то механизм называется *особым*, иначе – *обычным*.

Как показал опыт исследования, существуют ситуации, когда положение является особым, но функция $\Delta q_{n+k,\,j}(\varepsilon)$ является непрерывной по ε, включая нулевое значение, и имеет производную по некоторой функции от ε. В связи с этим предложим

Определение 5. Если существует такая непрерывная возрастающая функция $\omega(\varepsilon)$, $\omega(0)=0$, что существует ненулевая производная $d\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon)/d\omega(\varepsilon)$, то будем называть это значение «обобщенной производной».

Для поиска особых положений возможны следующие способы:

- аналитический (вывод формул для функций $\Delta q_{n+k,\,j}(\varepsilon), k=1..n;\ j=1..m$ и доказательство дифференцируемости);
- аналитически-оценочный (полный вывод формул не делается, но доказываются неравенства, опровергающие существование производной или отличие ее от нуля);
- вычислительный.

Алгоритм.

- ♦ выбираем последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \to 0$, например, $\varepsilon_1=0.1$, $\varepsilon_2=0.05$, $\varepsilon_3=0.025\ldots$;
- ♦ последовательно вычисляем значения $L_1=\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon_1)/\varepsilon_1$, $L_2=\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon_2)/\varepsilon_2$, $L_3=\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon_3)/\varepsilon_3\ldots$ Если эти числа «мало изменяются», то состояние является *обычным*, иначе – *особым*.

В последнем случае также вычисляем $M_1=\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon_1)/\varepsilon_1$, $M_2=\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon_2)/\varepsilon_2$, $M_3=\Delta q_{n+k,j}(\varepsilon_3)/\varepsilon_3$, $\varepsilon=0.1, 0.05, 0.025\ldots$;

вычисляем обобщенные координаты и их изменения в областях: $|v_2 - y_2| \le k\varepsilon,$ для различных $k = 1,2,3, \ldots$, находим максимальное из абсолютных величин разностей, деленных на ε (обозначим его через k_1).

Затем находим k_1 для $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4, \ldots$ для тех же k. Если k мало меняется, то это подтверждает, что положение *обычное*, иначе – *особое*.

Так же для контроля выводятся значения k_{1s} – максимальное из абсолютных величин разностей, деленных на $\sqrt{\varepsilon}.$

Отметим, что в [1], [3] возможные шарнирные механизмы представлены в виде неограниченной области в многомерном эвклидовом пространстве, для уменьшения его размерности длина одного из звеньев принята за единицу. Неограниченность области не дает возможности применить компьютер для глобального поиска всех особых положений по всем возможным механизмам и их положениям.

Кроме того, применение методики [5] дает возможность компактификации в пространстве состояний механизмов: за единицу выбирается самое длинное звено. Это, в свою очередь, дает возможность использования интервального анализа (см. например [4], [6] и [9]) для систематического поиска особых положений состояний механизмов.

Были произведены расчеты для случаев:

1) $x_1 = 0.75, x_2 = 1.5, y_1 = 0.6, y_2 = 1.$ Результат: k 1 – существенно изменяется; $k_1 \approx 15$ - *обычное положение <u>обычного механизма</u>*.

2) $x_1 = 0.75, x_2 = 1.5, y_1 = 0.5, y_2 = 1.$ Результат: k 1 – существенно изменяется; $k_{1s} \approx 0.8$ - *особое положение <u>обычного механизма</u>*.

3) $x_1 = 3, x_2 = 5, y_1 = 0, y_2 = 0.$ Результат: k 1 – существенно изменяется; $k_{1s} \approx 1.5$ - *(единственное) особое положение <u>особого механизма</u>*.

Литература

1. *Абдраимов Э. С.* Структурный синтез механизмов переменной структуры [Текст] / Э. С. Абдраимов. – Бишкек: Илим, 2001. – 100 с.
2. *Борубаев А. А., Панков П. С.* Компьютерное представление кинематических топологических пространств / А. А.Борубаев, П. С. Панков - Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.

3. *Зиялиев К. Ж.* Кинематический и динамический анализ шарнирно-четырехзвенных механизмов переменной структуры с созданием машин высокой мощности / Под общ. ред. С. Абдраимова / Бишкек: Илим, 2005. – 196 с.
4. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 222 с.
5. *Панков П. С., Баячорова Б. Д., Югай С. А.* Доказательные вычисления на ЭВМ и результаты их применения в различных разделах математики // Кибернетика (Киев). – 1982, № 6. – С. 111-116.
6. *Панков П. С., Кененбаева Г. М.* Применение метода малого параметра для выявления особых случаев в кулисных механизмах и гипотеза о необходимых условиях бифуркации // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 19-24.
7. *Пожбелко В. И.* Возникновение переменной (изменяемой) структуры и области особых положений механизма с учётом зазоров и вырождения кинематических пар // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. Выпуск № 29 (205). - 2010. – С. 13-20.
8. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва: Высшая школа, 1995. - 334 с.
9. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. – Институт вычислительных технологий СО РАН, – Новосибирск: Издательство XYZ, 2013. – 606 с.
10. *Kenenbaeva G. M.* Framework Definitions of Effects and Phenomena and Examples in Differential and Difference Equations. / Journal of Mathematics and System Science 4, 766-768 (2014).
11. *Kenenbaeva G. M., Kasymova T. J.* Computer Modeling of Phenomena in Dynamical Systems. // Наука, техника и образование, (РФ), 12 (18), (2015).