Построение множества Парето в задачах векторной оптимизации
Матусов И. Б.

Матусов Иосиф Борисович / Matusov Joseph Borisovich - кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения РАН, г. Москва

Аннотация: *в статье обсуждаются вопросы построения допустимого и паретовского множеств решений. Приведена оценка скорости сходимости алгоритма аппроксимации допустимого множества. Решена задача регуляризации множества Парето.*
Ключевые слова: *допустимое множество, множество Парето.*

Постановка задач оптимизации [1]. Предположим, что задана математическая модель исследуемой системы, и модель эта зависит от n параметров $\alpha_1,...,\alpha_n$. Как правило, специалисты задают пределы изменения каждого из параметров, которые мы будем называть *параметрическими ограничениями*

$$\alpha_j^* \le \alpha_j \le \alpha_j^{**} \quad (j=1,2,...,n). \tag{1}$$

Ограничения (1) выделяют в пространстве параметров параллелепипед П.

Функциональные ограничения. Кроме параметрических ограничений обычно в условия задачи включаются функциональные ограничения

$$c_l^* \le f(\alpha) \le c_l^{**} \quad (l=1,2,...,t). \tag{2}$$

Здесь $f_l(\alpha)$ — некоторые непрерывные функции от параметров.

Имеются критерии качества - непрерывные функции $\Phi_1(\alpha),...,\Phi_k(\alpha)$, которые желательно уменьшить. Очевидно, что не все значения $\Phi_\nu(\alpha)$ одинаково приемлемы в смысле допустимого функционирования системы. Чтобы избежать такой ситуации необходимо ввести *критериальные ограничения*

$$\Phi_\nu(\alpha) \le \Phi_\nu^{**} \quad (\nu=1,2,...,k). \tag{3}$$

Критериальное ограничение Φ_ν^{**} — это максимальное (минимальное) допустимое значение критерия $\Phi_\nu(\alpha)$.

Пусть D — множество точек α, которые удовлетворяют всем ограничениям (1), (2) и (3). Естественно назвать D *множеством допустимых точек(параметров).* Сформулируем одну из основных задач векторной оптимизации.

Необходимо найти такое множество $P \subset D$, для которого

$$\Phi(P) = \min_{\alpha \in D}(\Phi(\alpha), \tag{4}$$

где $\Phi(\alpha) = (\Phi_1(\alpha), \Phi_2(\alpha),...,\Phi_k(\alpha))$ - вектор критериев.

P называется множеством Парето, также как его образ в пространстве критериев - $\Phi(P)$.

Аппроксимация допустимого множества и множества Парето

Пусть ε_ν есть допустимая погрешность (по мнению эксперта) по критерию Φ_ν. Обозначим через ε набор $\{\varepsilon_\nu\}$, ν = l,...,*k*. Будем говорить, что область Ф(D) аппроксимирована конечным множеством Ф(D_ε) с точностью до набора ε, если для любого вектора $\alpha \in D$, существует вектор $\beta \in D_\varepsilon$ такой, что $\left|\Phi_\nu(\alpha) - \Phi_\nu(\beta)\right| \le \varepsilon_\nu, \quad \nu = 1,...,k$.

Предположим, что критерии являются непрерывными функциями, удовлетворяющими условию Липшица, т. е. для всех векторов α и β из области определения критерия Φ_ν существует число L_ν такое, что

$$\left|\Phi_\nu(\alpha) - \Phi_\nu(\beta)\right| \le L_\nu \max_j \left|\alpha_j - \beta_j\right|.$$

Или эквивалентно: существует L'_ν такое что

$$\left|\Phi_\nu(\alpha)-\Phi_\nu(\beta)\right| \le L'_\nu \sum_{j=1}^{r}\left|\alpha_j-\beta_j\right|.$$

Будем говорить, что функция $\Phi_\nu(\alpha)$ удовлетворяет специальному условию Липшица, если для всех векторов α и β существуют числа L_ν^j , j=1,...,, такие, что $|\Phi_\nu(\alpha)-\Phi_\nu(\beta)|\le \sum_{j=1}^{r} L_\nu^j|\alpha_j-\beta_j|$. При этом не все L_ν^j одинаковы. Пусть $[L_\nu]$ (или $[\sum_{j=1}^{r} L_\nu^j]$) это двоично-рациональное число, превосходящее L_ν (или $\sum_{j=1}^{r} L_\nu^j$) и достаточно близкое к последнему. Пусть $[\varepsilon_\nu]$ - максимальное, двоично-рациональное число, не превосходящее ε_ν с тем же числителем, что и $[L_\nu]$ (или $[\sum_{j=1}^{r} L_\nu^j]$). Двоично-рациональное число есть число вида $p/2^m$, где p и m - натуральные числа.

Теорема 1. Если критерии $\Phi_\nu(\alpha)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица или специальному условию Липшица, то для ε-аппроксимации $\Phi(D)$ достаточно

$$\max_\nu 2^\nu\left(\frac{[L_\nu]}{[\varepsilon_\nu]}\right)^r \text{ или } \max_\nu 2^\nu\left(\frac{\left[\sum_{j=1}^{r} L_\nu^j\right]}{[\varepsilon_\nu]}\right)$$

точек P_τ – сетки [1]. О значениях τ, см. [1].

Замечание. Число точек, определенное в этой теореме, может быть таким большим, что быстродействия компьютеров может оказаться недостаточным для использования полученной оценки. Эта трудность может быть преодолена с помощью разработки алгоритма, учитывающего специфику функций, встречающихся в конкретной проблеме.

Пусть L_ν $\nu=1,\ldots,k$ - константы Липшица определены и пусть N_1 - подмножество точек из D, которые являются либо паретовскими, либо лежат в ε-окрестности паретовской точки хотя бы по одному критерию. Другими словами, $\Phi_\nu(\alpha^0) \le \Phi_\nu(\alpha) \le \Phi_\nu(\alpha^0) + \varepsilon_\nu$, где $\alpha^0 \in P$, и P – множество Парето. Пусть $N_2 = D \backslash N_1$ и $\bar{\varepsilon}_\nu > \varepsilon_\nu$, где $\bar{\varepsilon}$ существенно больше ε.

Определение. Допустимое множество $\Phi(D)$ называется нормально аппроксимированым, если любая точка множества N_1 аппроксимирована с точностью до ε, а любая точка из N_2 - с точностью до $\bar{\varepsilon}$.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 существует конечная, нормальная аппроксимация $\Phi(D_\varepsilon)$ допустимого множества $\Phi(D)$.

Задача построения множества Парето достаточно сложна. Это объясняется тем, что аппроксимируя допустимое множество с заданной точностью, нельзя гарантировать аппроксимацию множества Парето. Такие задачи называются некорректными по Тихонову. В ряде работ предлагается решение этой проблемы при достаточно сильных ограничениях, накладываемых на критерии или систему предпочтений специалиста. Предлагаемые ниже результаты получены только в предположении о непрерывности критериев и выполнении условия Липшица [1].

Пусть P – множество Парето в пространстве параметров; $\Phi(P)$ – его образ; ε - набор допустимых погрешностей. Необходимо построить конечное множество Парето $\Phi(P_\varepsilon)$, аппроксимирующее $\Phi(P)$ с точностью до ε.

Пусть $\Phi(D_\varepsilon)$ - ε-аппроксимация $\Phi(D)$ и P_ε - Парето-оптимальное подмножество в D_ε. Как уже говорилось, задача аппроксимации $\Phi(P)$ является некорректной по Тихонову. Приведем определение этого понятия.

Пусть P - функционал (оператор) на пространстве X, P: $X \to Y$. Предположим, что существует $y^* = \inf P(x)$, и $V_\varepsilon(y^*)$ - окрестность искомого решения y^*. Выделим элемент x^* (или множество элементов) в пространстве X и его δ-окрестность $V_\delta(x^*)$. Назовем решением задачи нахождения экстремального значения функционала P такое x_δ^ε, которое одновременно удовлетворяет условиям $x_\delta^\varepsilon \in V_\delta(x^*)$ и $P(x_\delta^\varepsilon) \in V_\varepsilon(y^*)$. Если по крайней мере одно из этих условий не выполняется при произвольных ε и δ, то такая задача называется некорректной по Тихонову.

Аналогичное определение может быть дано в случае, когда P - оператор из пространства X в пространство Y. Пусть $X=\{\Phi(D_\varepsilon), \Phi(D)\}$; $Y=\{\Phi(P_\varepsilon), \Phi(P)\}$,

где $\varepsilon \to 0$, и пусть $P: X \to Y$ - оператор, сопоставляющий каждому элементу из X его Парето оптимальное подмножество. Тогда в соответствии с ранее сказанным задача построения множеств $\Phi(D_\varepsilon)$ и $\Phi(P_\varepsilon)$, принадлежащих одновременно ε-окрестностям $\Phi(D)$ и $\Phi(P)$, соответственно, является некорректной по Тихонову. В этом случае в пространствах X и Y должна быть определена метрика или топология [1], соответствующая системе предпочтений специалиста на $\Phi(D)$.

Зададим топологию с помощью V_ε-окрестностей точек $\Phi(\alpha^0) \in \Phi(\Pi)$

$$V_\varepsilon = \{\Phi(\alpha) \in \Phi(\Pi): \left|\Phi_\nu(\alpha^0) - \Phi_\nu(\alpha)\right| \le \varepsilon_\nu, \quad \nu = 1,\dots,k\}.$$

В приведенной ниже теореме 3 строится Парето оптимальное множество, $\Phi(P_\varepsilon)$, в котором для любой точки $\Phi(\alpha^0) \in \Phi(P)$ и любой ее ε-окрестности V_ε имеется точка $\Phi(\beta) \in \Phi(P_\varepsilon)$, принадлежащая V_ε. Обратно, в ε-окрестности любой точки $\Phi(\beta) \in \Phi(P_\varepsilon)$ существует точка $\Phi(\alpha^0) \in \Phi(P)$. Множество $\Phi(P_\varepsilon)$ называется аппроксимацией, обладающей свойством M [1]. Пусть построена $\Phi(D_\varepsilon)$-аппроксимация множества $\Phi(D)$.

Теорема 3. Если критерии непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то существует аппроксимация $\Phi(P_\varepsilon)$ множества Парето $\Phi(P)$, обладающая свойством M.

Доказательство теоремы проводится с помощью анализа окрестностей т. н. подозрительных точек из $\Phi(D_\varepsilon)$, т. е. таких точек, в окрестностях которых могут находиться истинно паретовские точки. Если в окрестностях подозрительных точек имеются новые Парето-оптимальные решения, то они добавляются к $\Phi(P_\varepsilon)$. Вместе с $\Phi(P_\varepsilon)$, они образуют искомую ε-аппроксимацию множества Парето [1]. В [1] показано, что этот подход решает проблему некорректности по Тихонову задачи аппроксимации множества Парето.

Литература

1. *Statnikov R. B. and Matusov J. B.* Multicriteria Optimization and Engineering. New York: Chapman & Hall, 1995. 236 p.