# Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в нерегулярном случае


**Каракеев Т. Т.[1], Рустамова Д.[2]**

*[1]Каракеев Таалайбек Тултемирович / Karakeev Taalaibek Tultemirovich – доктор физико-математических наук, профессор;*
*[2]Рустамова Динара / Rustamova Dinara – старший преподаватель,*
*кафедра информатики и вычислительной техники,*
*Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика*



***Аннотация:*** *в работе изучаются вопросы регуляризации и единственности решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае, когда функциональный коэффициент при искомой функции обращается в нуль на границах интервала области определения решения. Вводится возмущенное уравнение с малым параметром. Доказана равномерная сходимость решения возмущенного уравнения к решению исходного уравнения.*



***Ключевые слова****: уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость, пространство Гельдера.*


Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p_0(x)\varphi(x)+\int_0^x N_0(x,\xi,\varphi(\xi))d\xi = g_0(x), \qquad (1)$$

где для известных функций $N_0(x,\xi,\varphi)=K(x,\xi)\varphi(\zeta)+N(x,\xi,\varphi)$,

$$p_0(x)=\begin{cases} p_1(x),\ x\in[0,b_1], \\ p_2(x),\ x\in[b_1,b], \end{cases} \quad g_0(x)=\begin{cases} g_1(x),\ x\in[0,b_1], \\ g_2(x),\ x\in[b_1,b], \end{cases}$$

выполняются условия:

*а)* $p_1(x),\ g_1(x)\in C[0,b_1]$, $p_2(x)\in C^2[b_1,b]$, $p_1(b_1)=p_2(b_1)$; $g_2(x)\in C[b_1,b]$, $g_1(b_1)=g_2(b_1)$, $p_1(0)=p_2(b)=g_0(0)=0$, $p_1(x)-$неубывающая функция, $p_1(x)>0\forall x\in(0,b_1]$, $p_2(x)-$невозрастающая функция, $p_2(x)>0\forall x\in[b_1,b)$;

*б)* $K(x,\xi)\in C(D)$, $K(x,x)\geq 0$, $C_0p_0(x)+K(x,x)\geq d_1$, $0<d_1, C_0=const$, $D=\{(x,\xi)/\ 0\leq\xi\leq x\leq b\}$;

*в)* $N(x,\xi,\varphi)\in C^{1,1,2}(D\times R^1)$, $N(x,x,\varphi)=0$, $N_x(x,\xi,0)=0$.

Для всех $x\in[0,b_1]$ из уравнения (1) получим

$$p_1(x)\varphi_1(x)+\int_0^x K(x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^x N(x,\xi,\varphi_1(\xi))d\xi = g_1(x). \qquad (2)$$

Действуя оператором $I+C_0J$, где $I$ - единичный оператор, $(J\varphi)(x)=\int_0^x\varphi(\xi)d\xi$, из (2) получим уравнение

$$p_1(x)\varphi_1(x)+\int_0^x G(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi=\int_0^x M_1(x,\xi,\varphi_1(\xi))d\xi+\mu_1(x), \qquad (3)$$

где

$$M_1(x,\xi,\varphi_1(\xi))=[K(\xi,\xi)-K(x,\xi)]\varphi_1(\xi)-C_0\int_\xi^x K(\tau,\xi)\varphi_1(\xi)d\tau - N(x,\xi,\varphi_1(\xi))-$$

$$-C_0\int_{\xi}^{x} N(\tau,\xi,\varphi_1(\xi))d\tau,\ \ G(\xi)=C_0 p_1(\xi)+K(\xi,\xi),\ \ \mu_1(x)=g_1(x)+C_0\int_0^x g_1(\xi)d\xi .$$

Уравнение (3) является эквивалентным уравнению (2) в смысле разрешимости [2, с. 23].

Рассмотрим уравнение с малым параметром $\varepsilon\in(0,1)$ вида

$$(\varepsilon+p_1(x))\varphi_{1\varepsilon}(x)+\int_0^x G(\xi)\varphi_{1\varepsilon}(\xi)d\xi=\int_0^x M_1(x,\xi,\varphi_{1\varepsilon}(\xi))d\xi+\mu_1(x)+\varepsilon\varphi_1(0), \qquad (4)$$

Обозначим через $C^{\gamma}[0,b],(0<\gamma\le 1)$ - пространство Гельдера, а через $H_\varepsilon$ оператор, имеющий вид

$$(H_\varepsilon\varphi)(x)\equiv-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x \exp\left(-\int_{\xi}^{x}\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)G(\xi)\frac{\varphi(x)-\varphi(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi+$$

$$+\exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\frac{1}{\varepsilon+p(x)}[\varphi(x)-\varphi(0)],\ \ x\in[0,b_1].$$

Имеет место следующая лемма [1].

**Лемма.** Если $\varphi(x)\in C^{\gamma}[0,b],\quad 0<\gamma\le 1$ и выполняется условие *а) - б),* то для оператора $\varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x)$ справедлива оценка

$$\left\|\varepsilon(H_\varepsilon\varphi)(x)\right\|_C\le d_0\varepsilon^{\gamma},\ 0<d_0=const\ / \qquad (5)$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия *а) - в)* и уравнение (3) имеет решение $\varphi_1(x)\in C^{\gamma}[0,b_1],\quad 0<\gamma\le 1$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (4) равномерно сходится к решению уравнения (3), причем

$$\left\|\varphi_{1\varepsilon}(x)-\varphi_1(x)\right\|_{C[0,b_1]}\le d_2\varepsilon^{\gamma},\ 0<d_2=const.$$

*Доказательство.* Из (4), учитывая (3) и используя подстановку $\varphi_{1\varepsilon}(x)=\varphi_1(x)+\eta_{1\varepsilon}(x)$, получим

$$(\varepsilon+p_1(x))\eta_{1\varepsilon}(x)+\int_0^x G_2(\xi)\eta_{1\varepsilon}(\xi)d\xi=\int_0^x[M_1(x,\xi,\varphi_1(\xi)+\eta_{1\varepsilon}(\xi))-M_1(x,\xi,\varphi_1(\xi))]d\xi-$$

$$-\varepsilon(\varphi_1(x)-\varphi_1(0)),\ x\in[0,b_1].$$

С помощью резольвенты ядра $(-G_1(\xi)/(\varepsilon+p_2(x)))$ это уравнение перепишем в виде

$$\eta_{1\varepsilon}(x)=(H_\varepsilon[M(\varphi_1+\eta_{1\varepsilon})])(x)-(H_\varepsilon[M(\varphi_1)])(x)+\varepsilon(H_\varepsilon\varphi_1)(x)\ \ x\in[0,b_1]. \qquad (6)$$

где $(M\varphi_1)(x)=\int_0^x[M(x,\xi,\varphi_1(\xi))d\xi$.

Так как в силу условия *б)* и *в)* имеет место неравенство

$$\left|(M[\varphi_1+\eta_{1\varepsilon}])(\xi)-(M[\varphi_1+\eta_{1\varepsilon}])(x)-(M\varphi_1)(\xi)+(M\varphi_1)(x)\right|\le$$

$$\le d_1^{-1}d_2((JG_2)(x)-(JG_2)(\xi))(J|\eta_{1\varepsilon}|)(x),\ \ 0<d_2=const,$$

то

$$\left|(H_{0,\varepsilon}[M(\varphi_1+\eta_{1\varepsilon})])(x)-(H_{0,\varepsilon}[M(\varphi_1)])(x)\right|\le d_1^{-1}d_2\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x \exp\left(-\int_\xi^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}\int_\xi^x G(\nu)d\nu+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^x G(\nu)d\nu\right]\int_0^x|\eta_{1\varepsilon}(\nu)|d\nu\le\left[\int_0^x \exp\left(-\int_\xi^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\int_\xi^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu d_\xi\left(-\int_\xi^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x G(\nu)d\nu\right)\int_0^x G(\nu)d\nu\right]d_1^{-1}d_2\int_0^x|\eta_{1\varepsilon}(\nu)|d\nu\le(1+\ell^{-1})d_1^{-1}d_2\int_0^x|\eta_{1\varepsilon}(\nu)|d\nu.$$

Тогда из (5) получим

$$|\eta_{1\varepsilon}(x)|\le(1+\ell^{-1})d_1^{-1}d_2\int_0^x|\eta_{1\varepsilon}(\nu)|d\nu+\varepsilon|(H_\varepsilon\varphi_1)(x)|,\ \ x\in[0,b_1]$$

С помощью неравенства Гроноулла-Беллмана [3, с. 108] имеем

$$|\eta_{2\varepsilon}(x)|\le\exp\left(d_1^{-1}\left(2d_4+e^{-1}\right)d_2\right)\varepsilon|(H_\varepsilon\varphi_1)(x)|,\ x\in[0,b_1].$$

Отсюда, учитывая (5), приходим к оценке теоремы 1.

**Следствие 1.** При выполнении условий *а) - в),* решение уравнения (3) единственно в пространстве $C^\gamma[0,b_1],\quad 0<\gamma<1.$

Если $x\in[b_1,b]$, то уравнение (1) переходит к уравнению вида

$$p_2(x)\varphi_2(x)+\int_{b_1}^x K(x,\xi)\varphi_2(\xi)d\xi+\int_{b_1}^x N(x,\xi,\varphi_2(\xi))d\xi=g_3(x),\qquad (7)$$

где $g_3(x)=g_2(x)-\int_0^{b_1}N(x,\xi,\varphi_1(\xi))d\xi-\int_0^{b_1}K(x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi.$

Полагая $x=b_1$ в уравнении (2), (7) получим

$$p_1(b_1)\varphi_1(b_1)+\int_0^{b_1}K(b_1,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^{b_1}N(b_1,\xi,\varphi_1(\xi))d\xi=g_1(b_1),$$

$$p_2(b_1)\varphi_2(b_1)+\int_0^{b_1}K(b_1,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^{b_1}N(b_1,\xi,\varphi_1(\xi))d\xi=g_2(b_1).$$

Из разности данных двух уравнений, учитывая условие $g_1(b_1)=g_2(b_1)$, видим, что $p_1(b_1)\varphi_1(b_1)=p_2(b_1)\varphi_2(b_1)$, откуда в силу условия *а)* следует равенство $\varphi_1(b_1)=\varphi_2(b_1).$

Как и выше перейдем от уравнения (7) к уравнению следующего вида

$$p_2(x)\varphi_2(x)+\int_{b_1}^x G_2(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi=\int_{b_1}^x M_2(x,\xi,\varphi_2(\xi))d\xi+\mu_2(x),\ \ x\in[b_1,b],\qquad (8)$$

где $G_2(\xi)=C_0p_2(\xi)+K(\xi,\xi),\ M_2(x,\xi,\varphi_2(\xi))=[K(\xi,\xi)-K(x,\xi)]\varphi_2(\xi)-N(x,\xi,\varphi_2(\xi))-$

$$-C_0\int_\xi^x K(\tau,\xi)\varphi_2(\xi)d\tau-C_0\int_\xi^x N(\tau,\xi,\varphi_2(\xi))d\tau,\ \ \mu_2(x)=g_3(x)+C_0\int_{b_1}^x g_3(\xi)d\xi.$$

Пусть $\varepsilon$ - малый параметр из интервала (0, 1). Рассмотрим уравнение

$$\left(\varepsilon + p_2(x)\right)\varphi_{2\varepsilon}(x) + \int_{b_1}^{x} G_2(\xi)\varphi_{2\varepsilon}(\xi)d\xi = \int_{b_1}^{x} M_2\left(x,\xi,\varphi_{2\varepsilon}(\xi)\right)d\xi + \mu_2(x) + \varepsilon\varphi_1(0),$$

(9)

$x \in [b_1, b]$.

Положим $x = b_1$ в (4) и (9). Тогда

$$\left(\varepsilon + p_1(b_1)\right)\varphi_{1\varepsilon}(b_1) = -\int_0^{b_1} G(\xi)\varphi_{1\varepsilon}(\xi)d\xi - \int_0^{b_1} M_1\left(b_1,\xi,\varphi_{1\varepsilon}(\xi)\right)d\xi + \mu_1(b_1) + \varepsilon\varphi_1(0) =$$

$$= C_0\int_0^{b_1}\left[g_1(\xi) - p_1(\xi)\varphi_1(\xi) - \int_0^{\xi} K(\xi,v)\varphi_1(v)dv - \int_0^{\xi} N\left(\xi,v,\varphi_1(v)\right)dv\right] - \int_0^{b_1} N\left(b_1,\xi,\varphi_1(\xi)\right)d\xi -$$

$$-\int_0^{b_1} K(b_1,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi - g_1(b_1) + \varepsilon\varphi_1(0) = -\int_0^{b_1} K(b_1,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi - \int_0^{b_1} N\left(b_1,\xi,\varphi_1(\xi)\right)d\xi +$$

$$+ g_1(b_1) + \varepsilon\varphi_1(0);$$

$$(\varepsilon + p_2(b_1))\varphi_{2\varepsilon}(b_1) = -\int_0^{b_1} K(b_1,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi - \int_0^{b_1} N\left(b_1,\xi,\varphi_1(\xi)\right)d\xi + g_2(b_1) + \varepsilon\varphi_1(0).$$

В силу условия *а)*, рассматривая разность двух последних уравнений, получим $\varphi_{1\varepsilon}(b_1) = \varphi_{2\varepsilon}(b_1)$. Следовательно, для непрерывного продолжения регуляризованного решения $\varphi_{1\varepsilon}(x)$, $x \in [0, b_1]$ на отрезок $[b_1, b]$ функцией $\varphi_{2\varepsilon}(x)$ - решением уравнения (9) необходимо, чтобы правая часть этого уравнения была возмущена только и только на величину $\varepsilon\varphi_1(0)$.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия *а-в* и уравнение (7) имеет решение $\varphi_2(x) \in C^{\gamma}[b_1, b], 0 < \gamma \le 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (9) равномерно сходится к решению уравнения (7), причем

$$\left\|\varphi_{2\varepsilon}(x) - \varphi_2(x)\right\|_{C[b_1,b]} \le d_2\varepsilon + d_3\varepsilon^{\gamma}, 0 < d_2, d_3 = const.$$

**Следствие 2.** При выполнении условий теоремы 2 решение уравнения (7) единственно в пространстве $C^{\gamma}[0,1], 0 < \gamma \le 1$.

Доказательство теоремы 2 проведено в работе [2, с. 49-51] и используются аналогичные выкладки как в доказательстве теоремы 1.

Вышеизложенные теоремы и следствия позволяют заключить, что имеет место равномерная сходимость функции $\varphi_{\varepsilon}(x)$ к решению $\varphi(x)$ уравнения (1) для всех $x \in [0, b]$, при $\varepsilon \to 0$, где функции $\varphi_{\varepsilon}(x)$ и $\varphi(x)$ определены по правилу

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \varphi_{1\varepsilon}(x), x \in [0, b_1], \\ \varphi_{2\varepsilon}(x), x \in [b_1, b], \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), x \in [0, b_1], \\ \varphi_2(x), x \in [b_1, b], \end{cases}$$

причем выполняются условия согласования $\varphi_{1\varepsilon}(b_1) = \varphi_{2\varepsilon}(b_1)$, $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(b_1)$.

### *Литература*


1. *Каракеев Т. Т., Рустамова Д. К.* Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2009 – Вып. 40. - Стр. 127-132.

2. *Омуров Т. Д., Каракеев Т. Т.* Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. - Бишкек, «Илим» 2006 г. – 184 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.