# О некоторых свойствах $P-$секвенциально непрерывных отображениях
# Болжиев Б. А.

*Болжиев Бурас Асанбекович / Boljiev Buras Asanbekovich - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,*
*Национальная академия наук Кыргызской Республики институт теоретической и прикладной математики*
*Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика*

***Аннотация:*** *в статье обобщается понятие секвенциально непрерывного отображения, и изучаются свойства введенного понятия.*
***Ключевые слова:*** *ультрафильтр, $p-$секвенциально компактное пространство, $p-$компактные подмножества.*

Пусть $p$ является свободным ультрафильтром на $\omega$. В топологическом пространстве $X$ последовательность $(\mathrm{x}_n : \mathrm{n} \in \omega)$ обладает $p-$предельной точкой $x$, обозначаемое как $x = p - \lim x_n$, если для любой окрестности $O_x$ точки $x$ $\{\mathrm{n} : \mathrm{x}_n \in O_x\} \in p$. Пространство $X$ называется $p-$компактным, если произвольная последовательность обладает $p-$предельной точкой. Если точка $x$ является $p-$предельной точкой последовательности $(\mathrm{x}_n : \mathrm{n} \in \omega)$, то можно будет говорить, что последовательность $(\mathrm{x}_n : \mathrm{n} \in \omega)$ $p-$сходится к точке $x$, или $x$ является $p-$пределом этой последовательности.

Эти понятия были предложены Бернштейном [1]; они играют важную роль в теории, касающейся произведений счетно компактных пространств([5], [8]).

Комбарова [3] ввёл понятия $P-$компактности и $P-$секвенциальности, где $P \subset \beta\omega \setminus \omega -$является непустым множеством свободных ультрафильтров на $\omega$.

В работе [4] он определил условия, при которых условия $P-$компактности и $P-$секвенциальности сохраняются при операции произведения.

В.Сакс [6] (см. также [7]) обобщает понятие $p$-предела на направленности, заиндексированные произвольными бесконечными кардиналами следующим образом: пусть $p$ является свободным ультрафильтром на $\tau$ и $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau)$ является $\tau-$последовательностью в пространстве $X$, тогда точка $x$ является $p-$предельной точкой ($p-$пределом) $\tau-$последовательности $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau)$, $\mathrm{x} = \mathrm{p} - \lim \mathrm{x}_\alpha$, если для произвольной окрестности $U$ точки $x$, $\{\alpha \in \tau : \mathrm{x}_\alpha \in U\} \in p$.

Мы будем также говорить, что $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau)$ $p-$сходится к $x$, если $\mathrm{x} = \mathrm{p} - \lim \mathrm{x}_\alpha$. В.Сакс также доказывает, что любое топологическое пространство характеризуется своими $p-$пределами в том смысле, что для любого $A \subset X$, $\overline{A} = A \cup \{\mathrm{x} \in X : x$ является $p-$пределом некоторой $\lambda$-последовательности $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \lambda)$ для некоторого $\lambda \le \tau = X$ и некоторого ультрафильтра $p \in \beta\lambda \setminus \lambda\}$.

В свете этого факта мы ограничим наше внимание к случаю $P \subset \beta\tau \setminus \tau$ для некоторого $\tau$, причём $P$ обладает следующим свойством: пусть $\mathrm{x} = \mathrm{p} - \lim \mathrm{x}_\alpha$ для любого $p \in P$, тогда и любая последовательность $\tau-$подпоследовательность $(\mathrm{x}_{\alpha_\beta} : \alpha \in \tau)$ также $p-$сходится к точке $x$ при любом $p \in P$. Очевидно, что такие $P$ существуют, например, в случае $\tau = \omega$ и $P = \beta\omega \setminus \omega$ получим требуемое $P$.

Следуя терминологии Л. Кочинаса [10], будем в этом случае говорить, что $\tau-$ последовательность $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau)$ сильно $P-$ сходится к точке $x$ и писать $x = sP - \lim \mathrm{x}_\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f : X \to Y$ назовём $P-$секвенциально непрерывным, если оно переводит сильно $P-$сходящиеся последовательности в сильно $P-$сходящиеся, т.е. из того, что $x = sP - \lim \mathrm{x}_\alpha$ следует, что $f(x) = sP - \lim \mathrm{f}(\mathrm{x}_\alpha)$.

Если топологическое пространство $X$ таково, что всякая сильно $P-$сходящаяся последовательность сильно $P-$сходится только к одной точке, то такое пространство, мы будем говорить, обладает единственными $P-$пределами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $f : X \to Y$ назовём $P-$секвенциально замкнутым, если оно переводит $P-$секвенциально замкнутые множества в $P-$секвенциально замкнутые множества. Подмножество $M$ назовём $P-$секвенциально замкнутым, если всякая сильно $P-$сходящаяся последовательность из $M$ сильно $P-$сходится к точке из $M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Топологическое пространство $X$ обладает единственными $P-$пределами тогда и только тогда, когда диагональ пространства $X$ является $P-$секвенциально замкнутым в $X \times X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство $X$ обладает единственеыими $P-$пределами и диагональ $\Delta = \{(\mathrm{x}, \mathrm{x}) : \mathrm{x} \in X\}$ не является $P-$секвенциально замкнутым в $X \times X$. Тогда найдётся $\tau-$последовательность $\{\mathrm{z}_\alpha = (\mathrm{x}_\alpha, \mathrm{x}_\alpha) : \alpha \in \tau\}$ и точка $z \in X \times X$ такая, что $z = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$, $x \neq y$ и $\tau-$последовательность $(\mathrm{z}_\alpha : \alpha \in \tau)$ сильно $P-$сходится к точке $z$, т.е. $z = p-\lim z_\alpha$ для любого $p \in P$. Так как отображения проектирования $\pi_X$ на первый и второй сомножители пространства $X \times X$ непрерывны, то $\mathrm{x} = \mathrm{p}-\lim \mathrm{x}_\alpha$ для любого $p \in P$ и $y = \mathrm{p}-\lim \mathrm{x}_\alpha$ для любого $p \in P$, но $x \neq y$. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Обратно, пусть теперь $\tau-$последовательность $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau)$ сильно $P-$сходится к двум различным точкам $x$ и $y$. Тогда, как нетрудно, видеть $\tau-$последовательность $(\mathrm{z}_\alpha : \alpha \in \tau)$ сильно $P-$сходится к точке $z = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$, $x \neq y$.

Следовательно, диагональ $\Delta \subset X \times X$ не является $P-$секвенциально замкнутой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если отображение $f : X \to Y$ является $P-$секвенциально непрерывным, тогда $f^{-1}(A)$ является $P-$секвенциально замкнутым для любого $P-$секвенциально замкнутого подмножества $A$ пространства $Y$.

Пусть отображение $f$ является $P-$секвенциально непрерывным и $A$ $P-$секвенциально замкнуто в $Y$. Если $f^{-1}(A)$ не является $P-$секвенциально замкнутым множеством в, тогда найдётся $\tau-$последовательность $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau) \subset f^{-1}(A)$, сильно $P-$сходящаяся к точке $x \in X \setminus f^{-1}(A)$ и в силу $P-$секвенциальной непрерывности отображения $f$ $\tau-$последовательность $(\mathrm{y}_n = f(\mathrm{x}_\alpha) : \alpha \in \tau)$ сильно $P-$сходится к точке $y = f(\mathrm{x}) \notin A$, что противоречит $P-$секвенциальной замкнутости множества $A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\tau-$ последовательность $(\mathrm{x}_\alpha : \alpha \in \tau)$ $T_1-$пространства $X$ такова, что никакая её $\tau-$подпоследовательность не является сильно $P-$сходящейся. Тогда множество $A = \{(\mathrm{x}_\alpha, \alpha) : \alpha \in \tau)\}$ является $P-$секвенциально замкнутым подмножеством пространства $X \times \tau(P)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Топологическое пространство $X$ назовём $P-$секвенциально $P-$компактным, если любое бесконечное множество содержит сильно $P-$сходящуюся $\tau-$последовательность.

Как нетрудно видеть, понятия $P-$секвенциальной компактности и $P-$компактности не совпадают даже в самом простом случае, т.е. когда $P$ состоит из одной точки (одного ультрафильтра). Примером может служить пространство $\beta(\omega) \setminus \{p\}$. Оно не является $p-$компактным, но оно является $p-$секвенциально компактным. Но в свою очередь, любое $p-$компактное пространство является $p-$секвенциально компактным. В случае $P = \omega^*$, мы получаем обычное понятие секвенциальной компактности, где $\omega^* = \beta(\omega) \setminus \omega$.

Непосредственно из последнего определения получаем следующие утверждения:

a) $P-$секвенциально непрерывный образ $P-$секвенциально компактного пространства является $P-$секвенцильно компактным пространством.

b) $P-$секвенциально компактное подмножество пространства, обладающего единственными $P-$пределами, является $P-$секвенциально замкнутым.

c) $P-$секвенциально замкнутое подмножество $P-$секвенциально компактного пространства является $P-$секвенциально компактным подмножеством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $P-$секвенциально непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется $P-$секвенциально совершенным отображением, если $f \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ является $P-$секвенциально замкнутым для любого пространства $Z$, где $1_Z$ является тождественным отображением пространства $Z$. Нетрудно заметить, что в случае, $P = \omega^*$ наше определение превращается в секвенциально совершенное отображение [2].

Следующая теорема является аналогом теоремы о произведениисовершенных отображений [9].

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображения $f_1 : X_1 \to Y_1$ $f_2 : X_2 \to Y_2$ являются $P-$секвенциально совершенными отображениями. Тогда отображение $f = f_1 \times f_2$ также является $P-$секвенциально совершенным. Обратно, если отображение $f$ является $P-$секвенциально совершенным, то и отображения $f_1$ и $f_2$ являются $P-$секвенциально совершенными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве используется метод, предложенный Бурбаки [9]. Пусть отображения $f_1$ и $f_2$ являются $P-$секвенциально совершенными. Нетрудно догадаться, что композиция $P-$секвенциально замкнутых отображений является$P-$секвенциально замкнутым отображением. Возьмём произвольное топологическое пространство $Z$. Отображение $f_1 \times f_2 \times 1_Z$, очевидным образом, является композицией отображений $1_{Y_1} \times f_2 \times 1_Z$ и $f_1 \times 1_{X_2} \times 1_Z$, которые в силу предположения $P-$секвенциально замкнуты. Действительно, отображения $1_{Y_1} \times 1_Z$ и $1_{X_2} \times 1_Z$ являются тождественными отображениями пространств $Y_1 \times Z$ и $X_2 \times Z$, а отображения $f_1$ и $f_2$ являются $P-$секвенциально совершенными отображениями. Таким образом, отображение $f_1 \times f_2$ является $P-$секвенциально совершенным.

Обратно, пусть отображение $f$ является $P-$секвенциально совершенным, $Z$ - произвольное топологическое пространство. Пусть $K$ - $P-$секвенциально замкнутое подмножество пространства $X_2 \times Z$ и $T$ его образ в $Y_2 \times Z$ при оотображении $f_2 \times 1_Z$. Очевидно, что множество $(f \times 1_Z)(X_1 \times \mathrm{F})$ в $Y_1 \times Y_2 \times Z$ совпадает с $f_1(X_1) \times \mathrm{T}$. В силу$P-$секвенциальной совершенности отображения $f$ и $P-$секвенциальной замкнутости множества $K$, множество $f_1(X_1) \times \mathrm{T}$ $P-$секвенциально замкнуто в $Y_1 \times Y_2 \times Z$. Но тогда множество $T$ $P-$секвенциально замкнуто в $Y_2 \times Z$, так как произведение двух множеств $P-$секвенциально замкнуто тогда и только тогда, когда $P-$секвенциально замкнуты сомножители. Таким образом, отображение $f_2$ является $P-$секвенциально совершенным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ являются$P-$ секвенциально непрерывными.

a) если $f$ и $g$ $P-$секвенциально совершенны, то и $g \circ f$ $P-$секвенциально совершенно.

b) если $g \circ f$ является $P-$секвенциально совершенным отображением и $f$ отображение «на», то и $g$ $P-$секвенциально совершенное отображение.

c) если $g \circ f$ является $P-$секвенциально совершенным отображением и $g$ взаимно однозначно, то $f$ $P-$секвенциально совершенное отображение.

d) если $g \circ f$ является$P-$секвенциально совершенным отображением и $Y$ обладает единственными пределами, тогда $f$ $P-$секвенциально совершенное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. a) Пусть $f$ и $g$ $P-$секвенциально совершеннем отображениея и $F$ $P-$секвенциально замкнутое подмножество пространства $X \times Q$, где $Q$-произвольно выбранное топологическое пространство. Очевидно, что $((g \circ f) \times 1_Q)F = (g \circ 1_Q) \circ ((f \times 1_Q)F)$ откуда, в силу предположения, множество $((g \circ f) \times 1_Q)\mathrm{F}$ является $P-$секвенциально замкнутым. Итак, отображение $g \circ f$ является $P-$секвенциально совершенным.

b) Пусть $g \circ f$ секвенциально совершенное отображение и $f$ отображение «на». Рассмотрим множество $(g \circ 1_Q)A$, где $A$ $P-$секвенциально замкнутое подмножество в $Y \times Q$. Учитывая, тот факт, что $f$ является отображением «на» и отображение $f \times 1_Q$ является $P-$секенциально непрерывным, мы получаем $P-$секвенциальную замкнутость множества $(f \times 1_Q)^{-1}A$ и следующее соотношение: $((g \circ f) \times 1_Q) \circ ((f \times 1_Q)^{-1}\mathrm{A}) = (g \times 1_Q)\mathrm{A}$. Из этого соотношения следует, что $(g \circ 1_Q)A$ является $P-$секвенциально замкнутым отображением. Таким образом, отображение $g$ $P-$секвенциально совершенно.

c) Пусть отображение $g \circ f$ является $P-$секвенциально совершенным и $g$-взаимно однозначно. Возьмём произвольное $P-$секвенциально замкнутое подмножество $F$ пространства $X \times Q$. Очевидно, что $((g \circ f) \times 1_Q)F = (g \times 1_Q) \circ ((f \times 1_Q)F)$ и множество $((g \circ f) \times 1_Q)F$ является $P-$секвенциально замкнутым, откуда в силу взаимной однозначности отображения $g$ и $P-$секвенциальной непрерывности отображения $g \times 1_Q$ следует, что множество $(g \times 1_Q)^{-1}((g \times f) \times 1_Q)F$ $P-$ секвенциально замкнуто и $((g \circ f) \times 1_Q)F = (f \times 1_Q)F$, т.е. отображение $f$ $P-$секвенциально совершенно.

d) Пусть $g \times f$ является $P-$секвенциально совершенным отображением и $Y$ обладает единственными $P-$пределами. Положим $\varphi(x) = (x, f(x))$ и $\psi(y) = (g(y), y)$, т.е. определены отображения $\varphi: X \to Y$ и $\psi: Y \to Z \times Y$. Очевидно, отображение $\varphi$ $P-$секвенциальным гомеоморфизмом пространства $X$ на график отображения $f$ и отображение $\psi$ является $P-$секвенциальным гомеоморфизмом пространства $Y$ на пространство, симметричное графику отображения $g$. Учитывая предположение, мы получаем, что график $\varphi(X)$ отображения $f$ $P-$секвенциально замкнут в $X \times Y$, откуда нетрудно вывести, что отображение $\varphi$ является $P-$секвенциально совершенным. Из теоремы 1 следует, что отображение $((g \circ f) \times 1_Y)$ $P-$секвенциально совершенно, а тогда в силу a) и того, что $(g \circ f) \times 1_Y) \circ \varphi = \psi \circ f$ и в силу взаимной однозначности отображения $\psi$ из c) следует, что $f$ $P-$секвенциально совершенно.

Нижеследующая теорема является $P-$секвенциальным аналогом теоремы о секвенциально непрерывных отображениях [2].

ТЕОРЕМА 3. Пусть отображение $f: X \times Y$ является $P-$секвенциально непрерывным и пространство $Y$ обладает единственными $P-$пределами. Рассмотрим следующие условия:

a) $f$ $P-$секвенциально совершенное отображение

b) $f \times 1_Q : X \times \tau P \to Y \times \tau P$ является $P-$секвенциально замкнутым отображением

c) если $\tau-$последовательность $(s_\alpha : \alpha \in \tau)$ такова, что никакая её $\tau-$подпоследовательность не является сильно $P-$сходящейся, тогда $(f(s_\alpha) : \alpha \in \tau)$ не содержит никакой сильно $P-$сходящейся $\tau-$подпоследовательности в $Y$.

d) если $B$ $P-$секвенциально компактное подмножество пространства $Y$, тогда $f^{-1}(B)$ является $P-$секвенциально компактным подмножеством пространства $X$.

В этом случае c)$\Rightarrow$d), a)$\Rightarrow$b), если же пространство $X$ является $T_1-$пространством, тогда b) $\Rightarrow$c).

Множество $S$ - это множество $\cup\{s_\alpha : \alpha \in \tau\}$ со всеми $P-$пределами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО c) $\Rightarrow$ d). Пусть $(s_\alpha : \alpha \in \tau)$ $\tau-$последовательность в $f^{-1}(B)$. Если $\tau-$последовательность $(s_\alpha : \alpha \in \tau)$ не содержит ни одной сильно $P-$сходящейся $\tau-$подпоследовательности в $X$, тогда $(f(s_\alpha) : \alpha \in \tau)$ не содержит никакой сильно $P-$сходящейся $\tau-$подпоследовательности по свойству c). Но так как $(f(s_\alpha) : \alpha \in \tau) \subset B$, то это противоречит $P-$

секвенциальной компактности множества $B$. Поэтому $\tau-$последовательность $(s_\alpha : \alpha \in \tau)$ содержит сильно $P-$сходящуюся $\tau-$подпоследовательность $(s_{\alpha_k} : k \in \tau)$ к некоторой точке $x$ и тогда $(f(s_{\alpha_k}) : k \in \tau))$ сильно $P-$сходится к точке $f(x)$. В силу $P-$секвенциальной компактности множества $B$ и в силу того, что $Y$ обладает единственными $P-$пределами, $B$ является $P-$секвенциально замкнутым. Следовательно, $f(x) \in B$ и $(s_{\alpha_k} : k \in \tau)$ сильно $P-$сходится к точке $x \in f^{-1}(B)$.

a)$\Rightarrow$b) – это следует сразу из определения.

b)$\Rightarrow$c) Пусть пространство $X$ является $T_1-$пространством, тогда наша импликация следует из предложения 3.

### *Литература*


1. *Bernstein A. R.*. A new kind of compactness for topological spaces // Fund. Math. - 1970. V.66, P.185-193.
2. *Brown R.*. On sequentially proper maps and a sequential compactification // Journ. London Math. Soc.-1974.-V.7, № 3. –P.515-522.
3. *Комбаров А. П.*. Об одной теореме А. Х.Стоуна // Докл. АН СССР.-1983.-Т.270, № 1.-С.37-40.
4. *Комбаров А. П.*. О компактности и секвенциальности по множеству ультрафильтров. // Вестник МГУ. - Серия матем., мех.-1985.-Т.5.-С.15-18.
5. *Ginsburg J., Saks V.*. Some applications of ultrafilters in topology // Pacific Journ. Math.-1978.-V.57, № 2.-P.403-408/V. Saks. Ultrafilters invariants in topological spaces // General Topol. And Appl.-1974.-V.4, № 1.-P.1-28.
6. *Stephenson R. M.*. Initially k-compact and related spaces, In: K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, 569-602.
7. *Vaughan J. E.*. Countably compact and sequentially compact spaces. Ibid., 603-632.
8. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. - М.:Наука, 1968.-272с.
9. *Kocinac L.*. A generalization of chain-net spaces. Publications De L'institut Mathematique. Nouvelle serie tome 44 (58), 1988. pp.1089-114.