О продолжении отображений, определяемых некоторым семейством ультрафильтров
Болжиев Б. А.

Болжиев Бурас Асанбекович / Boljiev Buras Asanbekovich - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Национальная академия наук Кыргызской Республики институт теоретической и прикладной математики,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в данной работе обобщается понятие секвенциальной непрерывности, и рассматриваются вопросы продолжения этих отображений.*
Ключевые слова: *секвенциально непрерывные отображения, ультрафильтры.*

Ранее в работе [2] были исследованы секвенциально непрерывные отображения и продолжение секвенциально непрерывного отображения в секвенциально полное равномерное пространство. В данной статье рассматривается обобщение секвенциально непрерывного отображения и его продолжение в равномерное пространство, обладающее свойством типа полноты. Толчком для такого обобщения послужила работа Бернштейна [3].

Пусть m - бесконечный кардинал, $m^* = \beta m \setminus m$ - Стоун-Чеховский нарост дискретного пространства мощности m или пространство всех свободных ультрафильтров на множестве мощности m. Под m мы будем также понимать также первое порядковое число мощности m. Пусть теперь $p \in m^*$ и $\boldsymbol{P} \subset m^*$, причем $\boldsymbol{P} \neq \varnothing$. Произвольный набор точек $\{x_\xi : \xi \in m\}$ в топологическом пространстве будем называть m - последовательностью. Следуя работе [3], будем говорить, что $x = p\text{-}lim x_\xi$ или x является p - предельной точкой последовательности $\{x_\xi : \xi \in m\}$ в пространстве (X,τ), если для любой окрестности O_x точки x следует $\{\xi, x_\xi \in O_x\} \cup p$. Если $x = p\text{-}lim x_\xi$ для любого $p \in P$, то будем говорить, что последовательность $x_\xi : \xi \in m \quad P-s$ - сходится к x, или $\{x_\xi : \xi \in m\}$ является $P-s$ - сходящейся и x является его $P-s$ - пределом.

Для произвольного множества M топологического пространства (X,τ) положим $M_1 = \{x, x = p\text{-}lim x_\xi$ для любого $p \in P$ и для некоторой последовательности $x_\xi : \xi \in m \subset M$. Положим $M_2 = (M_1)_1$. Этот процесс можно стандартным образом продолжить и определить M_α для любого $\alpha \in m^+$, а именно: пусть M_γ определены для любого $\gamma < \alpha_0$, где $\alpha_0 = \alpha + 1$, тогда пусть $M_{\alpha_0} = (M_\alpha)_1$, если же α_0 - предельный ординал, то положим $M_{\alpha_0} = \cup\{M_\gamma, \gamma < \alpha_0\}$. Очевидно, этот процесс стабилизируется при $\alpha = m^+$, т.е. $M_\gamma \subset M_{m^+}$ для любого γ. Множество M_{m^+} будем обозначать через M_s.

Подмножество $H \subset X$ назовем $P-s$ - ***секвенциально плотным,*** если $H_s \subset X$ **.**

Определение 1. Подмножество $O \subset X$ называется $P-s$ - ***секвенциально открытым,*** если из того, что $x = p\text{-}lim x_\xi$ для любого $p \in P$ и $x \in O$ следует, что $\xi : x_\xi \in m \in p$ для всех $p \in P$.

Отметим без доказательства следующие предложения.

Предложение 1. Пусть $H - P - s$ - секвенциально плотное подмножество пространства (X,τ) и O - произвольное $P-s$ - секвенциально открытое подмножество в X. Тогда $O \subset H \neq \varnothing$.

Предложение 2. Для отображения $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ следующие условия эквиваленты:

1. Отображение f $P-s$ - секвенциально непрерывным, т.е. переводит $P-s$ - сходящиеся последовательностив $P-s$ - сходящиеся последовательности;

2. $f^{-1}(O)$ является $P-s$ - секвенциально открытым для любого $P-s$ - секвенциально открытого подмножества $O \subset Y$.

Предложение 3. Пусть $X = \cup\{H_\alpha : \alpha \in m^+\}$, $H_\alpha \subset H_\beta$, для любого $\alpha < \beta$ и $f : X \to Y$ - отображение, обладающее следующим свойством: $F|_{H_\alpha}$ является $P-s$ - секвенциально непрерывным отображением пространства H_α в Y. Тогда F является $P-s$ - секыенциально непрерывным отображением пространства X в Y.

И как следствие получаем лемму.

Лемма 1. Пусть $H-P-s$ - секвенциально плотное подмножество пространства $\left(X,\tau\right)$, $F:X\to Y$ - отображение, обладающее следующим свойством: $F\big|_{H_\alpha}$ является $P-s$ - секвенциально непрерывным отображением пространства H_α в Y для любого $\alpha\in m^+$. Тогда F является $P-s$ - секвенциально непрерывным отображением пространства X в Y.

Лемма 2. Пусть $H-P-s$ - секвенциально плотное подмножество пространства $\left(X,\tau\right)$ и W - произвольное $P-s$ - секвенциально открытое подмножество пространства $\left(X,\tau\right)$. Тогда $W\cap H_\alpha\subset\left(W\cap H\right)_\alpha$ для всех α.

Доказательство следует из монотонности операции $P-s$ - секвенциального замыкания и из того, что $W\cap H_1\subset\left(W\cap H\right)_1$.

Пусть $\left(X,U\right)$ - отделимое равномерное пространство. Последовательность $\xi:x_\xi\in m$ в $\left(X,U\right)$ называется $P-s$ ***- последовательностью Коши,*** если для любого покрытия $\alpha\in U$ существует множество $V\in\alpha$ такое, что $\xi:x_\xi\in V\ \in p$ для любого $p\in P$.

Определение 2. Равномерное пространство $\left(X,U\right)$ называется $P-s$ ***- полным,*** если любая $P-s$ последовательность Коши $P-s$ - сходится.

Предложение 4. Если $P-s$ - последовательность Коши p_0 — имеет предельную точку x для некоторого $p_0\in P$, то $x=p\text{-}lim x_\xi$ для любого $p\in P$.

Теорема 1. Пусть $H-P-s$ - секвенциально плотное подмножество пространства $\left(X,U\right)$ и $\left(Y,V\right)$- $P-s$ - секвенциально полное равномерное пространство. Для того чтобы $P-s$ - секвенциально непрерывное отображение $f:H\to\left(Y,\tau_V\right)$ $P-s$ - секвенциально непрерывно продолжалось на все X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\beta\in V$ существовало $P-s$ - секвенциально открытое покрытие α пространства $\left(X,\tau\right)$ такое, что $\alpha\wedge\left\{H\right\}$ было вписано в покрытие $f^{-1}\left(\beta\right):\left\{f^{-1}\left(B\right):B\in\beta\right\}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть отображение F является $P-s$ - секвенциально непрерывным продолжением отображения f со множеством H на все пространство. Пусть $\beta\in V$ и $\beta^0=\left\{\left\langle B\right\rangle:B\in\beta\right\}$, где $\left\langle B\right\rangle$ означает взятие внутренности множества B. Тогда β^0 является открытым покрытием пространства $\left(Y,\tau_V\right)$. Положим $\alpha=F^{-1}\left(\beta^0\right)$. Тогда, в силу предложения 2, α является $P-s$ - секвенциально открытым покрытием пространства $\left(X,U\right)$ и $\alpha\wedge\left\{H\right\}$ вписано в $f^{-1}\left(\beta\right)$, где $f^{-1}\left(\beta\right):\left\{f^{-1}\left(B\right):B\in\beta\right\}$.

Достаточность. Итак, пусть $x\in H_1\setminus H$ - произвольная точка и F_x - семейство всех $P-s$ - секвенциально открытых множеств пространства X, содержащих точку x. Тогда в силу предложения 1 $V\cap H\neq\varnothing$ для любого $V\in F_x$. Введем обозначение $F_x^! = \ V\cap H, V\in F_x$. Из определения множества H_1 следует существование такой последовательности $x_\xi,\xi<m\ \subset H$, которая $P-s$ - сходится к точке x. Пусть $\varPhi\ x_\xi$ - база фильтра, образованная элементами вида $x_\xi,\xi\in p, p\in P$. Фильтр, порожденный базой $\varPhi\ x_\xi$, будем называть ***фильтром, ассоциированным с последовательностью*** $x_\xi,\xi<m$. Нетрудно заметить, что фильтр $\varPhi\ x_\xi$ является более тонким, чем фильтр, порожденный семейством $F_x^!$.

Покажем, что $fF_x^!$ является базисом некоторого фильтра Коши в Y,V. Пусть $\beta\in V$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда найдется такое $P-s$ - секвенциально открытое покрытие α пространства

$\left(X,\tau\right)$, что $\alpha\wedge\{H\}$ вписано в $f^{-1}\left(\beta\right)$. А это означает, что существуют такие $A\in\alpha$ и $B\in\beta$, что $x\in A\cap f^{-1}\left(B\right)$, следовательно, $A\cap H\in F_x^!$ и $A\cap H\subset f^{-1}\ \ B$, следовательно, $f\ \ A\cap H\ \ \subset B$, т.е. $fF_x^!$ является базисом некоторого фильтра Коши, причем этот фильтр грубее фильтра, порожденного образом фильтра $\Phi\ \ x_\xi$.

Обозначим через $\Phi\ \ f\ \ x_\xi$ - фильтр Коши, порожденный образом $\Phi\ \ x_\xi$. Тогда, очевидно, фильтр Коши $\Phi\ \ f\ \ x_\xi$, в силу $P-s$ - секвенциальной полноты равномерного пространства Y,V сходится к некоторой единственной точке $y_x\in Y$. Положим $y_x=F\ \ x$, если $x\in H_1\setminus H$ и $F\ \ x=f\ \ x$, если $x\in H$. Покажем, что отображение F на множестве H_1 определено корректно.

Для всякого $x\in H_1\setminus H$ $F\ \ x$ определен как $P-s$ - предел некоторой фиксированной последовательности $x_\xi,\xi<m\ \subset H$ - $P-s$-сходящегося к точке x, т.е. $F\ \ x=P-s\lim x_\xi$. Пусть $x=P-s\lim x_\xi^!$ для некоторой последовательности $x_\xi^!,\xi<m\ \subset H$. Покажем, что $P-s\lim f\ \ x_\xi^!\ =P-s\lim f\ \ x_\xi$ и, значит, $F\ \ x\ =P-s\lim f\ \ x_\xi^!$.

Нетрудно заметить, что фильтр, порожденный образом фильтра $\Phi\ \ x_\xi^!$, ассоциированного с последовательностью $x_\xi^!,\xi<m$ является более тонким, чем фильтр, порожденный семейством $F_x^!$. Таким образом, образ фильтра $\Phi\ \ x_\xi^!$ является базисом некоторого фильтра, $P-s$ сходящегося к точке $y_x=F\ \ x$, но тогда $y_x=P-s\lim f\ \ x_\xi^!$. Итак, отображение $f:H_1\to Y$ определено корректно.

Покажем, что отображение $f:H\to\left(Y,\tau_V\right)$ обладает следующим свойством: пусть $W-P-s$ - секвенциально открытое подмножество пространства X. Положим $V_1=W\cap H_1,\ V=W\cap H$, которые не пусты. Тогда $F\ \ V_1\ \subset\left[F\ \ V\ \right]$. Действительно, для любой точки $x\in V_1\setminus V$ найдется такая последовательность $x_\xi,\xi<m\ \subset H$, что $F\ \ x\ =P-s\lim f\ \ x_\xi$, откуда непосредственно следует, что $F\ \ V_1\ \subset\left[F\ \ V\ \right]$, а именно, $F\ \ V_1\ \subset\ F\ \ V\ \ _1$. Осталось показать $P-s$ - секвенциальную непрерывность отображения $f:H_1\to Y$.

Пусть $x_0\in H_1\setminus H$ и $O\left(F\left(x_0\right)\right)$ - произвольная окрестность точки $F\left(x_0\right)$. Тогда по теореме [1], найдется $\beta_1\in V$ для которого $\beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)\subset\mathrm{O}\left(F\left(x_0\right)\right)$. Подберем $\beta\in V$ так, чтобы $\beta*\succ\beta_1$. Тогда, по условию теоремы, существует такое $P-s$ - секвенциально открытое покрытие α пространства X, что $\alpha\wedge\{H\}$ вписано в $f^{-1}\ \ B$. Подберем такие $A\in\alpha$ и $B\in\beta$, что $x_0\in A$ и $f\left(A\cap H\right)\subset B$. По определению отображения F и в силу доказанного свойства отображения F, имеем: $F\left(x_0\right)\in\left[f\left(A\cap H\right)\right]\subset\left[B\right]\subset\beta_1\left(B\right)\subset\beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)$. Осталось показать, что $F\left(A\cap H_1\right)\subset\beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)$. Известно, что $F\left(A\cap H_1\right)\subset\left[F\left(A\cap H\right)\right]=\left[f\left(A\cap H\right)\right]$, поскольку $\left[f\left(A\cap H\right)\right]\subset\beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)$, то получим, что $F\left(A\cap H_1\right)\subset\beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)$.

Таким образом, отображение $f:H_1\to Y$ является $P-s$ - секвенциально непрерывным. Мы описали первый шаг трансфинитного построения.

Пусть теперь α- произвольный фиксированный ординал $<m^+$. Предположим, что для любого изолированного ординала $\alpha^!\le\alpha$ определено $P-s$ - секвенциально непрерывное отображение $F_\alpha:H_\alpha\to Y$ такое, что $F_\alpha\big|_H=f$ и для любых ординалов $\alpha_1\le\alpha_2\le\alpha$ выполняется $F_{\alpha_2}\big|_{H\alpha_1}=F_{\alpha_1}$. Таким

образом, можно считать, что семейство отображений $\left\{F_{\alpha_1} : \alpha^! \le \alpha\right\}$ определяет некоторое отображение $F : \left(\left\{H_{\alpha^!} : \alpha^! \le \alpha\right\}\right) \to \left(Y, \tau_V\right)$. Пусть $\alpha^* = inf\left\{\beta : \beta > \alpha\right\}$. Очевидно, α^* является изолированным ординалом. Продолжим отображение F на множество $H_{\alpha^*} = \cup\left\{H_{\alpha^!} : \alpha^! \le \alpha\right\}$. Возьмем $x \in H_{\alpha^*} \setminus \cup\left\{H_{\alpha^!} : \alpha^! \le \alpha\right\}$, тогда найдется последовательность $\left\{x_\xi, \xi < m\right\} \subset \cup\left\{H_{\alpha^!} : \alpha^! \le \alpha\right\}$ такая, что $x = P - s\lim x_\xi$. Покажем, что для любого $V \in F_x$ существует $\xi(V) \le \alpha$ такое, что $F\left(x_{\xi(V)}\right) \in \left[f\left(V \cap H\right)\right]$ для всех $\xi \ge \xi(V)$ и $\xi \le \alpha$.

Действительно, в силу леммы 2 и свойства $P - s$ - секвенциально непрерывного отображения, переводящего $P - s$ - сходящиеся последовательности в $P - s$ - сходящиеся, нетрудно доказать по трансфинитной индукции следующее: для всякого $\alpha^! \le \alpha$ и любого $x \in H_{\alpha^!} \cap W$, где W - секвенциально открытое подмножество пространства X, справедливо соотношение: $F(x) \in \left[f\left(W \cap H\right)\right]$. Таким образом, для любого $V \in F_x$ найдется такое $\xi(V)$, что $x_{\xi(V)} \in V$ для всех $\xi \ge \xi(V)$. Что и требовалось доказать.

Ранее было показано, что семейство $\left\{f\left(V \cap H\right), V \in F_x\right\}$, является базисом некоторого фильтра Коши и, следовательно, семейство множеств $\left\{F\left(V \cap H\right), V \in F_x\right\}$ является базисом того же минимального фильтра Коши. Легко заметить, что фильтр $\varPhi \in \left(y_\xi\right)$, ассоциированный с последовательностью $\left(y_\xi, \xi < m\right)$, где $y_\xi = F\left(y_\xi\right)$, является более тонким, чем фильтр Коши, порожденный семейством $\left\{F\left(V \cap H\right), V \in F_x\right\}$. Поэтому, в силу $P - s$ - секвенциальной полноты пространства Y, V фильтр $\varPhi \in \left(y_\xi\right)$ сходится к некоторой единственной точке $y_x \in Y$. Положим $F_x = y_x$. Доказательство того, что определенное таким образом отображение F на множестве H_{α^*} корректно, мало отличается от доказательства корректности отображения F на множестве $H_{\alpha^!}$. Нетрудно заметить, что для любого $P - s$ - секвенциально открытого множества W в X и для произвольного $x \in H_{\alpha^!} \cap W$ выполняется следующее соотношение $F(x) \in \left[f\left(H_{\alpha^!} \cap W\right)\right]$. Осталось показать $P - s$ - секвенциальную непрерывность отображения $F : H_{\alpha^*} \to Y$.

Пусть $x_0 \in H_{\alpha^*}$ и $O\left(F\left(x_0\right)\right)$ - произвольная окрестность точки $F\left(x_0\right)$. Тогда найдется такое $\beta_1 \in V$, что $\beta_1\left(F\left(x_0\right)\right) \subset \mathrm{O}\left(F\left(x_0\right)\right)$. Пусть $\beta \in V$ такое, что $\beta * \succ \beta_1$. Тогда, по условию теоремы, существует такое $P - s$ - секвенциально открытое покрытие α пространства X, что $\alpha \wedge\ H$ вписано в $f^{-1}\ \beta$. Подберем такие $A \in \alpha$ и $B \in \beta$, что $x_0 \in A$ и $f\left(A \cap H\right) \subset B$. По доказанному выше имеем: $F\left(x_0\right) \in \left[f\left(A \cap H\right)\right] \subset [B] \subset \beta_1(B) \subset \beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)$. Пусть теперь $x^! \in H_{\alpha^*} \cap A$. Тогда $F\left(x^!\right) \in \left[f\left(A \cap H\right)\right] \subset \beta_1\left(F\left(x_0\right)\right)$ и, следовательно, $f\left(A \cap H_{\alpha^*}\right) \subset \beta_1\left(F\left(x_0\right)\right) \subset O\left(F\left(x_0\right)\right)$. Итак, отображение $F : H_{\alpha^*} \to Y$ является $P - s$ - секвенциально непрерывным. Доказательство по индукции завершено. Таким образом, существует такое отображение $F : X \to Y$, что $F\big|_{H_\alpha} : H_\alpha \to Y$ является $P - s$ - секвенциально непрерывным. В силу леммы 1, отображение $F : X \to Y$ является $P - s$ - секвенциально непрерывным.

Теорема доказано полностью.

Литература

1. *Борубаев А. А.* Равномерные пространства: Учебное пособие. – Фрунзе, 1987.-85с.
2. *Болжиев Б. А.* Об одном классе пространств, содержащем секвенциальные пространства. - Кирг.гос.ун-т им. 50-летия СССР.- РНТБ Кирг. ССР 16.11.87. № 320.

3. *Bernstein A. R.* A new kind of completeness for topological speces // Fund. Math.- 1970.- V.66-P.185-193.