Применение *r/φ*-алгоритма для определения производной функции Вейерштрасса

Шмойлов В. И.[1], Кириченко Г. А.[2], Плющенко С. В.[3]

[1]Шмойлов Владимир Ильич / Shmoylov Vladimir Il'ich - научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем;
[2]Кириченко Геннадий Анатольевич / Kirichenko Gennadij Anatol'evich – аспирант;
[3]Плющенко Сергей Викторович / Plushenko Sergej Viktorovich - студент,
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности,
Южный федеральный университет,
Инженерно-технологическая академия, г. Таганрог

Аннотация: *рассматривается подход к изучению недифференцируемых функций, базирующийся на методах теории непрерывных дробей. Установлено, что функция Вейерштрасса в рациональных точках x_0 точно представляется конечными цепными дробями. Цепные дроби для функции Вейерштрасса определяются, исходя из исходных тригонометрических рядов посредством рекуррентного алгоритма Рутисхаузера. Построением так называемых соответствующих цепных дробей находятся значения расходящихся рядов. Этот прием используется при определении производной функции Вейерштрасса, которая может быть записана расходящимся тригонометрическим рядом. Суммированием расходящихся рядов были установлены значения производной функции Вейерштрасса в рациональных точках x_0, причем, производные определяются конечными цепными дробями. Для определения производной функции Вейерштрасса использовался также r/φ-алгоритм.*

Ключевые слова*: функция Вейерштрасса, суммирование расходящихся дробей и рядов, производная функции Вейерштрасса.*

УДК 517.524

Введение

В [1-5] был рассмотрен подход к изучению недифференцируемых функций, основные идеи которого связаны с *r/φ*-алгоритмом, предложенным для суммирования расходящихся непрерывных дробей. Применим к изучению функции Вейерштрасса несколько необычный приём, связанный с построением для рядов так называемых соответствующих цепных дробей [6]. Следует отметить, что цепные дроби получили в последнее время в вычислительной математике разнообразные применения [7-9]. Для суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей применяется *r/φ*-алгоритм [10], существенно расширивший область использования цепных дробей [11-15]. Этот же алгоритм был востребован при определении производной функции Вейерштрасса.

1. О некоторых характеристиках функции Вейерштрасса

Функция Вейерштрасса представляется рядом

$$W(a,b,x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \qquad (1)$$

где $0 < b < 1$, a – нечетное натуральное число.

Функция Вейерштрасса всюду непрерывна. К. Вейерштрасс доказал [16], что если $ab > \frac{3\pi}{2}+1,$ то функция Вейерштрасса (1) не имеет конечной производной ни при каком значении x.

Период функции Вейерштрасса равен 2. На рис. 1 представлен график функции Вейерштрасса на интервале $-2 \le x \le 2$ при $a = 7$ и $b = 0{,}9$.

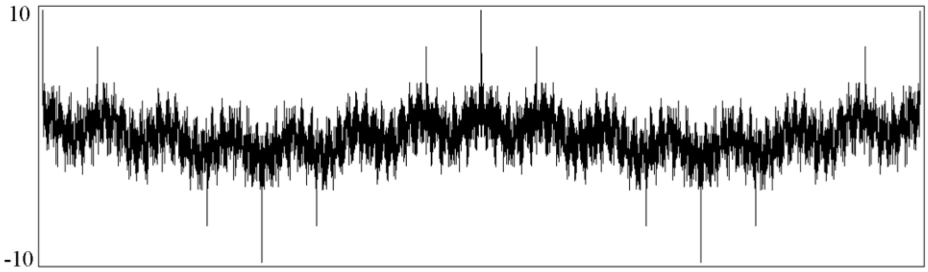

Рис. 1. График функции Вейерштрасса

В табл. 1 показана точность, достигаемая при вычислении функции Вейерштрасса $W(7;0{,}9;0{,}1)$ с учетом различного числа членов ряда.

Таблица 1. Вычисление функции Вейерштрасса при различном числе членов ряда

Число членов ряда, *n*	Значения отрезка ряда, представляющего функцию Вейерштрасса	Погрешность
2	4.2204978923192775586460397420421665166781144024692e-01	1.89e-01
4	8.0189459954066273614274755098801163816884173646915e-02	1.53e-01
8	1.3280176462992915573260042191912460739714187997666e-01	1.00e-01
16	1.8996856973325144189846843158747302278573490702436e-01	4.32e-02
32	**2**.2517012922955381321127980074052478742166044585789e-01	8.01e-03
64	**2.3**290175952504074389342519523909093248589396724251e-01	2.75e-04
128	**2.33176**354998368775447840361731196129176187310380 72e-01	3.24e-07
256	**2.33176679133**21116811724129275538570577751743695572e-01	4.51e-13
512	**2.33176679133661743571 60**3534974975707731616516728 08e-01	8.71e-25
1024	**2.331766791336617435716044056376887578275201327**2985e-01	3.25e-48

Рассмотрим распределение значений функции Вейерштрасса на экстремально малом интервале, а именно, при $\Delta = 10^{-300}$. На рис. 2 показан график функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0{,}9$ на интервале $\Delta = 10^{-300}$.

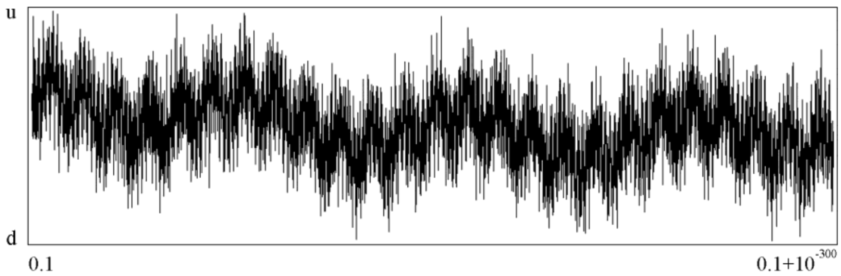

Рис. 2. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0{,}1 \div (0{,}1+10^{-300})$,
u = 2.33176679133366195134e-01, d = 2.33176679133366137302e-01

Функция Вейерштрасса непрерывна в классическом смысле, так как существует предел $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Из табл. 2 видно, однако, что значения функции Вейерштрасса в точках $x_0+\Delta$ становятся «близкими» к значению функции Вейерштрасса в точке x_0 при чрезвычайно малых значениях Δ.

Таблица 2. Значения функции Вейерштрасса $W(7;0{,}9;0{,}1+\Delta)$ *при различных Δ*

Значение Δ	Значение функции Вейерштрасса в точках $x_0+\Delta$	$\lvert W(x_0)-W(x_0+\Delta)\rvert$
10^{-8}	7.0357286850359108973166265621137604309853172758228902811 9593e-01	4.70e-01
10^{-16}	3.2073318063257130113454001960657218865387822973786234163 7813e-01	8.76e-02
10^{-32}	**2**.5618092851173030551397490380513860445961138271620013368 5240e-01	2.30e-02
10^{-64}	**2.33**5413032717250833759369166336890334371855913211614073885 59e-01	3.65e-04
10^{-128}	**2.33176**3226921603457792850219263338476644191616605682003302 12e-01	3.56e-07
10^{-256}	**2.331766791336**2584450287381208950702178730712729121290659 8672e-01	3.59e-14
10^{-512}	**2.331766791336617435716044 0**604242247673168704277629669832 7206e-01	4.05e-28
10^{-1024}	**2.3317667913366174357160440563768875782752013273310432 62**71496e-01	3.82e-56

В табл. 3 приведены значения функции Вейерштрасса в различных точках x, полученные вычислением ряда (1), при $a = 7$; $b = 0{,}9$.

Таблица 3.Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи рядов

Аргумент, x	Значение функции Вейерштрасса
0,11111	0.76537635692490243286131333915959543572480440209926
0,22222	1.58847355043107530811305225550698905703979564127376
0,33333	2.35122181618483641764699054326721014809410753048931
0,44444	0.52198479744428018753105054806804626706612737288241

Построим по ряду Вейерштрасса, так называемую, соответствующую цепную дробь. В [17] были рассмотрены многочисленные соответствующие непрерывные дроби для элементарных и специальных функций. Соответствующие цепные дроби, как правило, аппроксимируют функции в более широкой области, нежели ряды, а также имеют более высокую скорость сходимости. Соответствующие цепные дроби могут быть установлены по степенных рядам, которыми представляются функции. Помимо формул Хейлерманна–Стилтьеса и формул Хлопонина, известны рекуррентные алгоритмы для определения коэффициентов соответствующих непрерывных дробей, например, алгоритмы Висковатова, Никипорца, Рутисхаузера. Запишем алгоритм Рутисхаузера [18] и приведем граф этого алгоритма.

Определим для ряда

$$\alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{1n-1} + \cdots \tag{2}$$

коэффициенты α_{n0} соответствующей цепной дроби:

$$\alpha_{00} + \frac{\alpha_{10}}{1} - \frac{\alpha_{20}}{1} + \frac{\alpha_{30}}{1} - \frac{\alpha_{40}}{1} + \frac{\alpha_{50}}{1} - \ldots - \frac{\alpha_{2n,0}}{1} + \frac{\alpha_{2n+1,0}}{1} - \ldots. \tag{3}$$

Коэффициенты цепной дроби (3) находятся по рекуррентным формулам

$$\alpha_{2,\nu} = \frac{\alpha_{1,\nu+1}}{\alpha_{1,\nu}},$$

$$\alpha_{3,\nu} = -\alpha_{2,\nu+1} + \alpha_{2,\nu},$$

$$\alpha_{4,\nu} = \frac{\alpha_{2,\nu+1} \cdot \alpha_{3,\nu+1}}{\alpha_{3,\nu}},$$

$$\alpha_{5,\nu} = \alpha_{3,\nu+1} - \alpha_{4,\nu+1} + \alpha_{4,\nu},$$

$$\alpha_{2n,\nu} = \frac{\alpha_{2n-2,\nu+1} \cdot \alpha_{2n-1,\nu+1}}{\alpha_{2n-1,\nu}},$$

$$\alpha_{2n+1,\nu} = \alpha_{2n-1,\nu+1} - \alpha_{2n,\nu+1} + \alpha_{2n,\nu} \tag{4}$$

Элемент таблицы Рутисхаузера определяется по формулам (4) всего за две операции: при нахождении элемента нечетной строки нужна одна операция сложения и одна операция вычитания. При нахождении элемента четной строки используется одна операция умножения и одна операция деления. Особенность метода Рутисхаузера – востребованность данных большой разрядности. При определении коэффициентов цепной дроби использовалась разрядная сетка в 8000 бит.

Схема Рутисхаузера, определяемая формулами (4), показана на рис. 3.

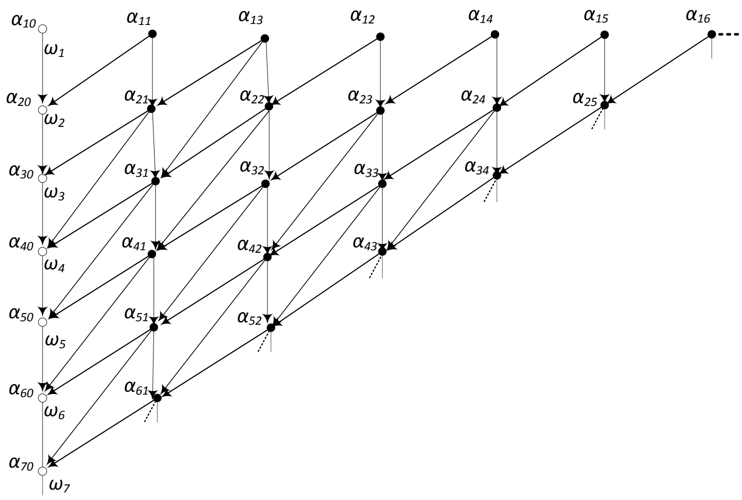

Рис. 3. Схема алгоритма Рутисхаузера

В табл. 4 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса $W(7;0{,}9)$ в точке x = 0,222222.

Таблица 4

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса $W(7;0{,}9;0{,}222222)$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, P_{n+1}/Q_{n+1}
0	0,7660448919	0,7660448919
1	0,1562790285	0,9223239204
2	-4,8704010562	0,7926664169
3	-4,1365577979	0,4833329437
4	-0,1660285263	0,5946467407
5	-0,0014186983	0,5947479255
…	…	…
797	0,6909124693	0,0122795277
798	-9,4798262229	0,0122795277
799	-10,3483975575	0,0122795277
800	-0,7585597831	0,0122795277
801	4.156312e-150	0,0122795277

Так как $\alpha_{801,0} = 4{,}1563 \cdot 10^{-150}$, то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке табл. 4, в цепную дробь вида (3), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$W(7;0{,}9;0{,}222222) = 0{,}766044 + \frac{0{,}156279}{1} \,\underset{-}{}\, \frac{-4{,}870401}{1} + \ldots + \frac{-10{,}348397}{1} \,\underset{-}{}\, \frac{-0{,}758559}{1} = 0{,}012279.$$

В табл. 5 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные дроби, построенных из исходных рядов (1) с параметрами a = 7; b = 0,9. Переменные x имеют шесть десятичных разряда: x = 0,111111; x = 0,222222; x = 0,333333; x = 0,444444.

Таблица 5.Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби

Аргумент, *x*	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,111111	-0.2891258132695	0.1563119e-152	1601
0,222222	0.0122795276749	4.1563119e-150	801
0,333333	3.6761809804422	-2.4201470e-155	801
0,444444	-1.2241731996156	-1,6155829e-327	801

В табл. 6 приведены значения функции Вейерштрасса *W*(7;09), определенные при помощи ряда (1) в тех же точках *x*, в которых значения функции устанавливались конечными цепными дробями.

Таблица. 6.Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи рядов

Аргумент, *x*	Значения функции Вейерштрасса
0,111111	-0.2891258132695
0,222222	0.0122795276749
0,333333	3.6761809804422
0,444444	-1.2241731996156

Сравнивая вторые колонки табл. 5 и табл. 6 можно отметить совпадение значений функций Вейерштрасса, вычисленных по различным алгоритмам при помощи рядов и цепных дробей.

Как уже отмечалось, было доказано, что при $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$ функция Вейерштрасса

$$W(a,b,x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

не имеет производной в классическом смысле, т. е. не существует предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

ни при каком значении *x*.

Установим производную функции Вейерштрасса иным путем, а именно, исходя из расходящегося ряда, которым производная функции Вейерштрасса может быть представлена:

$$W'(a,b,x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]. \tag{6}$$

В табл. 7 приведены коэффициенты конечной цепной дроби для производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0{,}9$ в точке $x = 0{,}222222$.

Таблица 7. Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса в точке x=0,222222

Номер звена дроби, *n*	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, P_{n+1}/Q_{n+1}
0	-2,0193751523	-2,0193751523
1	19,4913650484	17,4719898961
2	-2,1881707922	4,0942763172
3	-14,0238061943	21,4081167697
4	-18,1397215545	0,1023857378
5	0,0285510428	-0,0387938579
…	…	…

797	-0,5746896483	-13,3023567439
798	-316,1175508901	-19,3952807426
799	-313,4270699003	94,6087767123
800	0,2741924574	0,0719814736
801	-2,086761283e-326	0,0719814736

В табл. 8 приведены значения производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в серии рациональных точек: $x = 0,111111$; $x = 0,222222$; $x = 0,333333$; $x = 0,444444$.

Таблица 8

Значения производной функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби в различных точках x

Аргумент , x	Значение производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепных дробей	Номер конечно го звена дроби
0.111111	-0.062460305523185	0.2199911e-151	1601
0.222222	0.071981473618939	-2.0867613e-326	801
0.333333	9.844370595748815	-0.4870014e-326	801
0.444444	0.049322958204706	1.6961502e-325	801

В [19] предложено иное, нежели традиционное определение сходимости непрерывных дробей. Для установления значений непрерывных дробей используется *r/φ–алгоритм*:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, *если существуют пределы:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left|P_i / Q_i\right|} = r_0, \tag{7}$$

$$\pi \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \left|\varphi_0\right|, \tag{8}$$

где P_i/Q_i *– значение i-й подходящей дроби;* k_n *– число отрицательных подходящих дробей из совокупности, включающей n подходящих дробей.*

Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет, при определенных условиях, за последовательностью вещественных подходящих дробей усмотреть некое комплексное число, которое, собственно, и представлено этой непрерывной дробью. Признаком комплексности такой расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков её подходящих дробей, причем эти перемены знаков происходят сколько угодно много раз. Другими словами, комплексная единица e^i устанавливается из «поведения» подходящих дробей непрерывной дроби. Параметры же комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, то есть модуль r_0 и аргумент φ_0, могут быть определены, в частности, так называемым *r/φ–алгоритм*ом, то есть формулами (7) и (8).

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0 примет значения 0 при π. Если $\varphi_0 = 0$, то значения сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0: $z = r_0 e^{i0} = r_0$. Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число: $z = r_0 e^{i\pi} = -r_0$.

Несмотря на то, что понятия сходимости и расходимости относятся к бесконечным цепным дробям, определим эти понятия для конечных цепных дробей, беря термины в кавычки, указывая, тем самым, что рассматриваются конечные цепные дроби. Целесообразность введения понятий «сходимости» и «расходимости», применительно к конечным цепным дробям, обусловлено тем обстоятельством, что в некоторых практически важных случаях решение задачи мы получаем именно в конечных цепных дробях, как, например, при решении систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей или при суммировании некоторых расходящихся рядов [20]. К конечным цепным дробям приходим и при определении производной функции Вейерштрасса в рациональных точках.

Конечная цепная дробь с n звеньями

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ldots + \frac{a_n}{b_n}}} \quad (9)$$

будет «сходиться», если последовательность её подходящих дробей

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad (10)$$

приближается к значению $\frac{P_n}{Q_n}$, то есть имеет место цепочка неравенств:

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_0}{Q_0}\right| > \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_1}{Q_1}\right| > \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_2}{Q_2}\right| > \cdots > \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|. \quad (11)$$

Если последовательность подходящих дробей (10) не приближается к значению конечной цепной дроби (9), то есть не имеет места цепочки неравенств подходящих дробей (11), то конечную цепную дробь (9) будем называть «расходящейся».

Для определения значений «расходящихся» конечных цепных дробей, также, как и в случае расходящихся бесконечных цепных дробей, будем использовать с некоторой модификацией *r/φ–алгоритм*:

Конечная цепная дробь (9) имеет в общем случае комплексное значение $z = r_n e^{i\varphi_n}$. *Модуль* r_n *и модуль аргумента* $|\varphi_n|$ *определяются по формулам:*

$$r_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} |P_i / Q_i|}\ , \quad (12)$$

$$|\varphi_n| = \pi \frac{k_n}{n}\ , \quad (13)$$

где P_i/Q_i *– подходящие цепной дроби (10),* k_n *– число отрицательных подходящих из общего числа* n *подходящих дробей.*

Здесь надо отметить, что сам факт конечности цепных дробей не имеет принципиального значения при определении их «сходимости» и «расходимости», так как конечные цепные дроби могут включать сколь угодно большое число звеньев.

На рис. 4 приведены первые и последние 100 подходящих дробей цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса с параметрами a = 7; b = 0,9 в точке x = 0,222222. Конечная цепная дробь для производной функции Вейерштрасса в точке x = 0,222222 с шестью десятичными разрядами содержит 1600 звеньев.

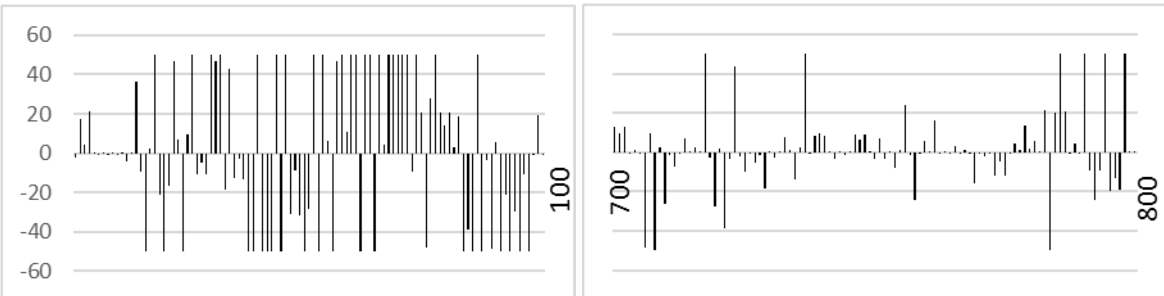

Рис. 4. Значения подходящих цепной дроби, представляющей производную W′(7;0,9;0,222222)

Из рис. 4 видно, что цепная дробь, представляющая производную функции Вейерштрасса, не сходится в классическом смысле.

В табл. 9 приведены результаты определения значений расходящейся в классическом смысле цепной дроби, которая получена для производной функции Вейерштрасса при помощи модифицированного *r/φ*-алгоритма. Для определения коэффициентов цепной дроби использовался алгоритм Рутисхаузера. Полученная цепная дробь – конечная, так как 1601-й коэффициент этой цепной дроби близок к нулю: $\alpha_{801,0} = -2{,}08676e$-326.

Таблица 9

Определение комплексной производной функции Вейерштрасса с параметрами a = 7; b = 0,9 в точке x = 0,222222

n	Коэффициенты	Коэффициенты	Значения	Значения	Значения

	ряда, c_n	цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	подходящих P_{n+1}/Q_{n+1}	модуля r_{n+1}	аргумента φ_{n+1}
0	-2,019375152	-2,019375152	-2,019375152	2,019375152	3,141592654
1	19,49136505	19,49136505	17,4719899	5,939907597	1,570796327
2	-42,6504357	-2,188170792	4,094276317	5,247013429	1,047197551
3	-504,7950067	-14,02380619	21,40811677	7,457250777	0,785398163
4	4875,186804	-18,13972155	0,102385738	3,163085208	0,628318531
5	-11006,63776	0,028551043	-0,038793858	1,518982969	1,047197551
…	…	…	…	…	…
795	-3,4214820e+635	-45,98182002	75,12667203	10,54416939	1,716825131
796	-3,0036140e+636	1,403436219	-19,4158875	10,55224954	1,718612794
797	2,0565214e+637	-0,574689648	-13,30235674	10,55531254	1,720395977
798	-1,9077442e+638	-316,1175509	-19,39528074	10,56335297	1,722174696
799	-5,0894769e+638	-313,4270699	94,60877671	10,59234101	1,720021978
800	-5,8928721e+639	0,274192457	0,071981474	10,52653946	1,717874635
801	5,8566322e+640	-2,08676e-326			

Таким образом, просуммировав при помощи *r/φ*-алгоритма расходящуюся в классическом смысле цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0{,}9$ в точке $x = 0{,}222222$, получим значение комплексной производной:

$W'(7;\ 0{,}9;\ 0{,}222222) = 10{,}527\ e^{i1{,}718}$.

На рис. 5 показаны значения модуля r_n комплексного числа, являющегося значением «расходящейся» цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0{,}9$ в точке $x = 0{,}222222$.

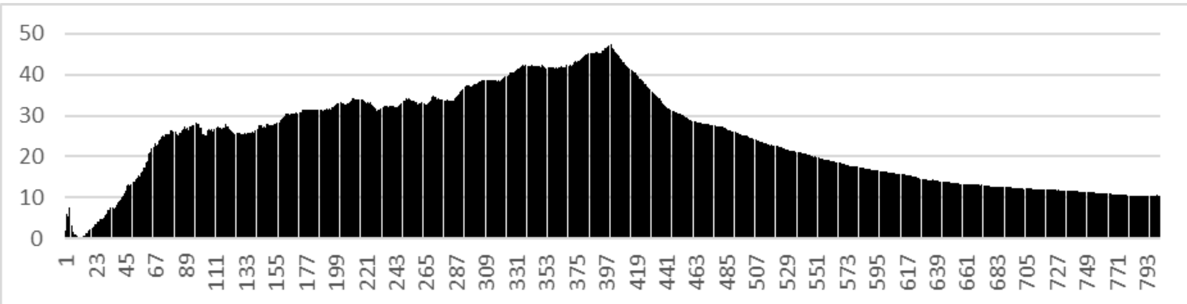

Рис. 5. Значение модуля r_n комплексного числа

На рис. 6 приведены значения аргумента φ_n комплексного числа, представленного расходящейся цепной дробью, найденной для производной функции Вейерштрасса.

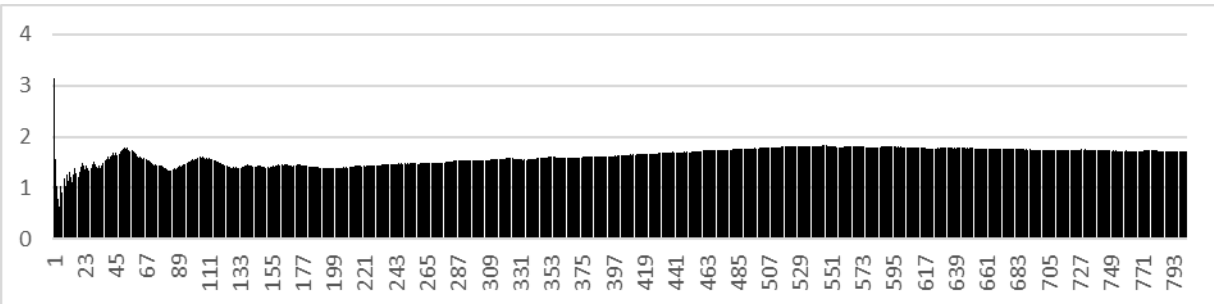

Рис. 6. Значение аргумента φ_n комплексного числа

Аналогичным способом были установлены значения комплексных производных функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0{,}9$ в точках: $x = 0{,}111111$ и $x = 0{,}444444$:

$W'(7;0{,}9;0{,}111111) = 20{,}220\ e^{i1{,}419}$; $W'(7;0{,}9;0{,}444444) = 37{,}590\ e^{i1{,}518}$.

Заключение

Применение цепных дробей позволило установить наличие производной функции Вейерштрасса в рациональных точках. Цепные дроби можно использовать при рассмотрении других функций, которые не имеют производных в классическом смысле.

Перспективным подходом к изучению быстро осциллирующих функций является метод, связанный со способом суммирования расходящихся цепных дробей, именуемый как *r/φ*-алгоритм. Этот алгоритм дает возможность установить комплексные значения расходящихся в классическом смысле цепных дробей, имеющих вещественные звенья, и позволяет подойти к изучению производных быстро осциллирующих функций с принципиально новых позиций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, НИР №2257 базовой части государственного задания № 2014/174.

Литература

1. *Левин И. И., Хисамутдинов М. В., Шмойлов В. И.* Функция Вейерштрасса и r/φ-характеристики. // Известия ЮФУ. Технические науки, 2014, № 1, с. 144-158.
2. *Шмойлов В. И., Хисамутдинов М. В., Кириченко Т. А.* Интервальные и предельные r/φ-характеристики функции Вейерштрасса. // Вестник МИФИ, 2014, Т. 3, № 3, с. 301-310.
3. *Хисамутдинов М. В., Шмойлов В. И.* Предельные r/φ-характеристики функции Вейерштрасса. // Нелинейный мир, № 3 Т. 13, 2015. с. 39-52.
4. *Guzik V. F., Shmoylov V. I., Lyapuntsova E. V., Kirichenko G. A.* One of the approaches to the analysis of rapidly oscillating functions. // Transactions on Information and Communication Technologies, Vol. 58, – 2014, p. 405-413.
5. *Шмойлов В. И., Кириченко Г. А., Плющенко С. В.* О производной функции Вейерштрасса // Приволжский научный вестник. № 1 (53) – 2016. – С. 20-27.
6. *Джоунс У., Трон В*. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
7. *Скоробогатько В. Я*. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
8. *Cuyt A., Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W*. Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – Springer Science. 2008. – 431 pp.
9. *Shmoylov V. I., Kirichenko G. A.* Algorithm for Summation of Divergent Continued Fractions and Some Applications. // Computational Mathematic and Matematical Physics, 2015, vol. 55, № 4, pp. 549-563.
10. *Шмойлов В. И*. Периодические цепные дроби – Львов: Академический экспресс, 1998. – 219 с.
11. *Шмойлов В. И*. Непрерывные дроби. В 3-х т., Т. 1., Периодические непрерывные дроби. // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. – Львов, 2004. – 645 с.
12. *Шмойлов В. И*. Непрерывные дроби. В 3-х т., Т. 2., Расходящиеся непрерывные дроби. // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. – Львов, 2004. – 558 с.
13. *Шмойлов В. И*. Непрерывные дроби. В 3-х т., Т. 3., Из истории непрерывных дробей. // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. Львов: Меркатор, 2004. – 520 с.
14. *Шмойлов В. И*. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.
15. *Шмойлов В. И., Редин А. А., Никулин Н. А*. Непрерывные дроби в вычислительной математике. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 228 с.
16. *Weierstrass K*. Math. Werke. Bd.2. Berlin, 1895. Abh. 6.
17. *Шмойлов В. И*. Непрерывные дроби и *r/φ*-алгоритм. - Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 608 с.
18. *Рутисхаузер Г*. Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.
19. *Шмойлов В. И*. Суммирование расходящихся цепных дробей // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. – Львов, 1997. – 23 с.
20. *Гузик В. Ф., Ляпунцова Е. В., Шмойлов В. И.* Непрерывные дроби и их применение. – М.: Физматлит, 2015 – 298 с.