Трехскоростная коэффициентно-обратная задача переноса типа Каца

Омуров Т. Д.[1], Туганбаев М. М.[2], Саркелова Ж. Ж.[3]
1

[1]Омуров Таалайбек Дардайылович / Omurov Taalaibek Dardailovich - доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа;
[2] Туганбаев Марат Мансурович / Tuganbaev Marat Mansurovich - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и образовательных технологий;
[3]Саркелова Жылдыз Жанышевна / Sarkelova Jyldyz Zhanyshevna – старший преподаватель, кафедра кибернетики и информационных технологий, факультет математики информатики и кибернетики,
Кыргызский национальный университет им.Ж. Баласагына, г.Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в статье исследуется обратная задача переноса с малым параметром, где требуется нахождение неизвестной функции распределения и восстановления неизвестного коэффициента в правой части в банахово пространстве* W_C *и весовом пространстве* $W^2_{h_*}$. *Фактически, здесь развиваем теорию кинетических нагруженных уравнений типа Каца, считая, что частота столкновений* h *ограниченно-неотрицательная и интегрируемая функция в* R^3, *а электростатическое ускорение* $0 < a = \text{const}$. *Кроме того, излагаемый метод решение задачи переноса позволяет оставаться в исходных координатах.*

Ключевые слова: *задача переноса, функция распределения, трехскоростная обратная задача, малый параметр, гладкие функции.*

Введение

Основа современной математической теории задач о переносе частиц заложена, как известно, в работах [1 - 6, 9, 10, 13] и др., где было выявлено то, многообразие проблем, которые предстояло решить. В этих работах излагаются односкоростные и многоскоростные задачи теории переноса. Сформулированы теоремы существования: на основе вариационных методов, на основе метода введение функциональных пространств с дифференциально-разностными характеристиками, на основе специальных функций, позволивший получить ряд оценок о свойствах решения и др.

Известно, что теория возмущенных задач переноса [4,8,11] отличается от теории сингулярно-возмущенных задач [7,14], причем выбор пространства зависит от функции h и при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения в задаче переноса не меняется. Поэтому, в качестве развития этого направления, здесь рассматриваем нагруженную трехскоростную обратную задачу переноса типа Каца с малым параметром. При этом требуется доказать разрешимости изучаемой задачи с учетом тех условий, которые накладываются на $h \geq 0$ и установить близость решений возмущенного и вырожденного уравнений в тех или иных пространствах.

Пусть исследуется задача переноса вида

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} + h_0 f_\varepsilon = V_\varepsilon(t) F(x_1,x_2,x_3,t) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t)[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t)}{\partial x_i}], \quad (1)$$

$$f_\varepsilon\big|_{t=0} = f_0(x_1,x_2,x_3), \forall (x_1,x_2,x_3) \in R^3, \quad (2)$$

$$f_\varepsilon(x_1^0,x_2^0,x_3^0,t) = \varphi(t), \forall t \in [0,T_0], \quad (3)$$

$$h_0(x_1,x_2,x_3,t) \equiv \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x_i) + h(x_1,x_2,x_3,t), \quad (4)$$

где $0 < a_i = \text{const},\ 0<\lambda_i(x_i), \varphi(t),\ 0 \leq h(x_1,x_2,x_3,t), 0 \neq F(x_1,x_2,x_3,t),\ f_0$ - известные гладкие функции, $\Omega_1 = R^3 \times [0,T_0];\ R^3 \ni (x_1^0,x_2^0,x_3^0), (x_1^*,x_2^*,x_3^*) -$ фиксированные точки. При этом надо определить неизвестные функции $(f_\varepsilon, V_\varepsilon)$ в тех или иных пространствах. Известно, если $\varepsilon = 0$ имеем вырожденное уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + h_0 f = V(t) F(x_1,x_2,x_3,t), \quad (5)$$

$(0,1) \ni \varepsilon -$малый параметр. Чтобы, ответить на поставленные вопросы, сперва докажем разрешимость задачи (1)–(3) в $W_C = \{f,V: f \in C^{1,1,1,1}(\Omega_1), V \in C[0,T_0]\}$ - пространство функций (f,V) с нормой: $\|f\|_{W_C} = \|f\|_C + \sum_{i=1}^{3}\|f_{x_i}\|_C + \|f_t\|_C + \|V\|_C$.

Далее, установим близость решений $(f_\varepsilon, V_\varepsilon)$ к (f,V), когда $\varepsilon \to 0$ в смысле нормы пространства W_C. Поэтому результаты данной работы состоит из двух пунктов.

В первом пункте исследуем разрешимости задачи (1)–(4) в W_C, а во втором пункте докажем близость решений возмущенной и вырожденной задачи в этом классе функций.

I. Рассмотрим задачу (1) – (3). Следовательно, используем преобразование вида [8,11]:

$$\begin{cases} f = Q(x_1,x_2,x_3,t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right), \forall(x_1,x_2,x_3,t)\in\Omega_1, \\ Q = Q_0(x_1-a_1t, x_2-a_2t, x_3-a_3t) + \int_0^t \exp\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{x_i-a_i(t-s)}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\{V(s)F(x_1-a_1(t-s), \\ x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s) - h(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)f(x_1-a_1\times \\ \times(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)\times \\ \times[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,s)}{\partial x_i}]\}ds, \\ Q\big|_{t=0} = Q_0(x_1,x_2,x_3) \equiv f_0(x_1,x_2,x_3)\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right), \quad \forall(x_1,x_2,x_3)\in R^3, \end{cases}$$

(*)

так как

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\{V(t)F(x_1,x_2,x_3,t) - h(x_1,x_2,x_3,t)f(x_1,x_2,x_3,t) +$$

$$+\varepsilon f_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t)[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t)}{\partial x_i}]\}.$$

(**)

Тогда с учетом (*) и (**) из (1) следует

$$\begin{aligned} f_\varepsilon = {} & f_0(x_1-a_1t, x_2-a_2t, x_3-a_3t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_it}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right) + \\ & +\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\{V_\varepsilon(s)F(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), \\ & x_3-a_3(t-s);s) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)\times \\ & \times[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,s)}{\partial x_i}] - h(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3- \\ & -a_3(t-s);s)f_\varepsilon(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)\}ds \equiv \\ & \equiv (H_0[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}])(x_1,x_2,x_3,t). \end{aligned} \qquad (6)$$

Лемма 1. При условиях (2)-(4) уравнение (6) является составным представлением проблемы (1) - (3).

Доказательство. На основе (6) и дифференцируя последовательно по t и x_i, получим

$$
\left\{
\begin{aligned}
& f_{\varepsilon t} = -\sum_{i=1}^{3} a_i f_{0\bar{l}_i}(x_1 - a_1 t, x_2 - a_2 t, x_3 - a_3 t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \int\limits_{x_i - a_i t}^{x_i} \lambda_i(x_i^{/}) dx_i^{/} \right) + f_0(x_1 - a_1 t, x_2 - \\
& -a_2 t, x_3 - a_3 t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \int\limits_{x_i - a_i t}^{x_i} \lambda_i(x_i^{/}) dx_i^{/} \right)[-\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x_i - a_i t)] + V_\varepsilon(t) F(x_1, x_2, x_3, t) - \\
& -h(x_1, x_2, x_3, t) f_\varepsilon(x_1, x_2, x_3, t) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1, x_2, x_3, t)[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t)}{\partial x_i}] + \\
& +\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \int\limits_{x_i - a_i(t-s)}^{x_i} \lambda_i(x_i^{/}) dx_i^{/} \right)\{[-\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x_i - a_i(t-s))](V_\varepsilon(s) F(x_1 - a_1(t-s), x_2 - \\
& -a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) - h(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) \times \\
& \times f_\varepsilon(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), \\
& x_3 - a_3(t-s); s)[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)}{\partial x_i}]) - \sum_{i=1}^{3} V_\varepsilon(s) a_i F_{l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - \\
& -a_3(t-s); s) + \sum_{i=1}^{3} a_i h_{l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) f_\varepsilon(x_1 - a_1(t-s),
\end{aligned}
\right.
$$

$$\begin{cases} x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) + \sum_{i=1}^{3} a_i h(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) \times \\ \times f_{\varepsilon l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) - \varepsilon \sum_{i=1}^{3} a_i f_{\varepsilon l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - \\ -a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s)[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)}{\partial x_i}]\} ds, \\ f_{\varepsilon x_i} = \sum_{i=1}^{3} f_{0\bar{l}_i}(x_1 - a_1 t, x_2 - a_2 t, x_3 - a_3 t) \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \int_{x_i - a_i t}^{x_i} \lambda_i(x_i^/) dx_i^/ \right) + f_0(x_1 - a_1 t, x_2 - \\ -a_2 t, x_3 - a_3 t) \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \int_{x_i - a_i t}^{x_i} \lambda_i(x_i^/) dx_i^/ \right) [-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} (\lambda_i(x_i) - \lambda_i(x_i - a_i t))] + \\ + \int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \int_{x_i - a_i(t-s)}^{x_i} \lambda_i(x_i^/) dx_i^/ \right) \{[-\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} (\lambda_i(x_i) - \lambda_i(x_i - a_i(t-s))](V_\varepsilon(s) F(x_1 - \\ -a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) - h(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - \\ -a_3(t-s); s) f_\varepsilon(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1 - a_1(t-s), x_2 - \\ -a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s)[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)}{\partial x_i}]) + \sum_{i=1}^{3} V_\varepsilon(s) F_{l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - \\ -a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) - \sum_{i=1}^{3} h_{l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) f_\varepsilon(x_1 - \\ -a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) - \sum_{i=1}^{3} h(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - \\ -a_3(t-s); s) f_{\varepsilon l_i}(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s) + \varepsilon \sum_{i=1}^{3} f_{\varepsilon l_i}(x_1 - a_1(t-s), \\ x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s)[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)}{\partial x_i}]\} ds \equiv \\ \equiv (H_i[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}])(x_1, x_2, x_3, t), (\bar{l}_i = x_i - a_i t, \quad l_i = x_i - a_i(t-s); i = \overline{1,3}). \end{cases} \tag{7}$$

И как результат, подставляя (7) в (1), получим тождество. Лемма 1 доказана.

Отметим, что уравнение (6) содержит две неизвестные функции $(f_\varepsilon, V_\varepsilon)$. Поэтому, принимая во внимание (3) и далее, дифференцируя (6) по t, выразим неизвестный коэффициент $V_\varepsilon(t)$, т.е. получим систему в виде

$$\begin{cases} f_\varepsilon = (H_0[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}])(x_1, x_2, x_3, t), \\ f_{\varepsilon x_i} = (H_i[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}])(x_1, x_2, x_3, t), (i = \overline{1,3}), \\ V_\varepsilon(t) = (H[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}])(t), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$
\begin{cases}
(H[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}])(t) \equiv (F(x_1^0,x_2^0,x_3^0,t))^{-1}\{ f_1(t) - [\varepsilon\varphi(t)[\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t)}{\partial x_i}] + \\
+\int\limits_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{a_i}\int\limits_{x_i^0-a_i(t-s)}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\{[-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(x_i^0-a_i(t-s))](V_\varepsilon(s)F(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s), \\
x_3^0-a_3(t-s);s) - h(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s)\, f_\varepsilon(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s), \\
x_3^0-a_3(t-s);s) + \varepsilon f_\varepsilon(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s)[\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t)}{\partial x_i}]) - \\
-\sum_{i=1}^{3}V_\varepsilon(s)a_iF_{l_i}(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s) + \sum_{i=1}^{3}a_ih_{l_i}(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0 - \\
-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s)\, f_\varepsilon(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s) + \sum_{i=1}^{3}a_ih(x_1^0 - \\
-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s)\, f_{\varepsilon l_i}(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s) - \\
-\varepsilon\sum_{i=1}^{3}a_i f_{\varepsilon l_i}(x_1^0-a_1(t-s),x_2^0-a_2(t-s),x_3^0-a_3(t-s);s)[\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t)}{\partial x_i}]\}ds]\}, \\
f_1(t) \equiv \varphi_t(t) - \{-\sum_{i=1}^{3}a_i f_{0l_i}(x_1^0-a_1t,x_2^0-a_2t,x_3^0-a_3t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{a_i}\int\limits_{x_i^0-a_it}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right) + f_0(x_1^0-a_1t, \\
x_2^0-a_2t,x_3^0-a_3t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{a_i}\int\limits_{x_i^0-a_it}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)[-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(x_i^0-a_it)] - h(x_1^0,x_2^0,x_3^0,t)\varphi(t)\}.
\end{cases}
$$

Если

$$\sum_{i=1}^{3}L_{H_i} + L_{H_0} + L_H = d < 1, \qquad (9)$$

где $L_H, L_{H_0}, L_{H_i}, (i=\overline{1,3})-$ коэффициенты Липшица операторов $H, H_0, H_i, (i=\overline{1,3}),$ при этом отображают области определения в себя, то система (8) разрешима в W_C, причем $\{f_{\varepsilon,m+1}\},\{V_{\varepsilon,m+1}\}$ строится методом Пикара:

$$
\begin{cases}
f_{\varepsilon,m+1} = (H_0[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m}, f_{\varepsilon x_3,m}])(x_1,x_2,x_3,t),(m=1,2,...), \\
f_{\varepsilon x_i,m+1} = (H_i[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m}, f_{\varepsilon x_3,m}])(x_1,x_2,x_3,t),(i=\overline{1,3}), \\
V_{\varepsilon,m+1}(t) = (H[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m}, f_{\varepsilon x_3,m}])(t),
\end{cases} \qquad (10)
$$

где (f_0,V_0) начальные приближения с ошибками вычисления:

$$
\begin{cases}
E_{m+1} \le d^{m+1}E_0 \xrightarrow[m\to\infty(d<1)]{} 0, \\
E_{m+1} = \left\| f_{\varepsilon,m+1} - f_\varepsilon \right\|_C + \sum_{i=1}^{3}\left\| f_{\varepsilon x_i,m+1} - f_{\varepsilon x_i} \right\|_C + \left\| V_{\varepsilon,m+1} - V_\varepsilon \right\|_C \le d^{m+1}E_0 \xrightarrow[m\to\infty(d<1)]{} 0, \\
E_0 = \left\| f_{\varepsilon,0} - f_\varepsilon \right\|_C + \sum_{i=1}^{3}\left\| f_{\varepsilon x_i,0} - f_{\varepsilon x_i} \right\|_C + \left\| V_{\varepsilon,0} - V_\varepsilon \right\|_C,
\end{cases} \qquad (11)
$$

при этом

$$[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m}, f_{\varepsilon x_3,m}] \xrightarrow[m\to\infty]{} [V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2}, f_{\varepsilon x_3}], \forall (x_1,x_2,x_3,t)\in\Omega_1. \quad (12)$$

Теорема 1. При условиях (2)-(4), (9) исходная обратная задача решена в W_C, причем

$$\begin{cases} \|f_\varepsilon\|_{W_C} = \|f_\varepsilon\|_C + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i}\|_C + \|f_{\varepsilon t}\|_C + \|V_\varepsilon\|_C, \\ \|f_\varepsilon\|_{W_C} \le (1-d_0)^{-1}Q_0, (d_0<1, 0<Q_0=\text{const}). \end{cases}$$

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 1 задача (1) – (3) разрешима в W_C. Следовательно, альтернативно можем считать, на основе теоремы вложения К. Фридрихса [12], что задача (1) – (3) и разрешима в $W^2_{h_*}(\Omega = R^3\times(0,T_0))$, где пространство $W^2_{h_*} = \left\{ f_\varepsilon \in C(\Omega_1);\ f_{\varepsilon x_i u}, f_{\varepsilon t} \in L^2_{h_*}(\Omega); V_\varepsilon\in L^2(0,T_0), i=\overline{1,3} \right\}$ с нормой: $\|\cdot\|_{W^2_{h_*}} = \|f_\varepsilon\|_C + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} + \|f_{\varepsilon t}\|_{2,h_*} + \|V\|_2$.

Заметим, что обратные проблемы связаны с весовой функцией $h_* \equiv \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Поэтому должны получить результаты, когда

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t)\in L^2_{h_*}(\Omega), V_\varepsilon(t)\in L^2(0,T_0), \\ \left|(F(x_1^0,x_2^0,x_3^0,t))^{-1}\right| \le \gamma_0 = const. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть выполняется (9), (13). Тогда решение обратной проблемы (1) - (3), может быть расценено как последовательности пределов $\{f_{\varepsilon,m+1}\}$, $\{V_{\varepsilon,m+1}\}$ в пространстве $W^2_{h_*}$.

Действительно, оценивая,

$$\left|f_{\varepsilon,m+1}-f_\varepsilon\right|,\ \left|f_{\varepsilon x_i,m+1}-f_{\varepsilon x_i}\right|,\ \left|V_{\varepsilon,m+1}-V_\varepsilon\right|$$

в $L^2_{h_*}$ и L^2, имеем

$$\begin{cases} \|f_{\varepsilon,m+1}-f_\varepsilon\|_{2,h_*} \le L_0(\|f_{\varepsilon,m}-f_\varepsilon\|_{2,h_*} + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i,m}-f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} + \|V_{\varepsilon,m}-V_\varepsilon\|_2), \\ \|f_{\varepsilon x_i,m+1}-f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} \le L_i(\|f_{\varepsilon,m}-f_\varepsilon\|_{2,h_*} + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i,m}-f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} + \|V_{\varepsilon,m}-V_\varepsilon\|_2), (i=\overline{1,3}), \\ \|V_{\varepsilon,m+1}-V_\varepsilon\|_2 \le L_4(\|f_{\varepsilon,m}-f_\varepsilon\|_{2,h_*} + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i,m}-f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} + \|V_{\varepsilon,m}-V_\varepsilon\|_2). \end{cases}$$

Далее, принимая во внимание

$$\begin{cases} \bar d = \sum_{i=0}^{4} L_i < 1, \\ \|f_{\varepsilon,m+1}-f_\varepsilon\|_{2,h_*} + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i,m+1}-f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} + \|V_{\varepsilon,m+1}-V_\varepsilon\|_2 = E_{m+1,(2)}, \\ \|f_{\varepsilon,0}-f_\varepsilon\|_{2,h_*} + \sum_{i=1}^{3}\|f_{\varepsilon x_i,0}-f_{\varepsilon x_i}\|_{2,h_*} + \|V_{\varepsilon,0}-V_\varepsilon\|_2 = E_{0,(2)}, \end{cases} \quad (14)$$

получим

$$E_{m+1,(2)} \le \bar d^{\,m+1} E_{0,(2)} \xrightarrow[m\to\infty(\bar d<1)]{} 0$$

в смысле $W^2_{h_*}$.

Теорема 2. В условиях (1)-(4), (9) и (12), (14) обратная задача (1)–(3) имеет единствен-ное решение в $W^2_{h_*}$, причем это решение расценено как последовательности пределов $\{f_{\varepsilon,m+1}\}$, $\{V_{\varepsilon,m+1}\}$ в $W^2_{h_*}$.

II. Чтобы доказать

$$\left(f_\varepsilon, V_\varepsilon\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left(f, V\right) \qquad (15)$$

в W_C, поступим, следующим образом, т.е. учитывая результаты теоремы 1 и предполагая, что вырожденная задача:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + h_0 f = V(t)F(x_1,x_2,x_3,t), \qquad (16)$$

$$\begin{cases} f\big|_{t=0} = f_0(x_1,x_2,x_3), \forall (x_1,x_2,x_3) \in R^3, \\ f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = \varphi(t), \forall t \in [0, T_0], \end{cases} \qquad (17)$$

разрешима в W_C, устанавливаем близость решений $\left(f_\varepsilon, V_\varepsilon\right)$ к $\left(f, V\right)$, когда $\varepsilon \to 0$ в смысле нормы пространства W_C. Действительно, для этого учитывая результаты формулы (6), имеем

$$f = f_0(x_1 - a_1 t, x_2 - a_2 t, x_3 - a_3 t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i - a_i t}^{x_i} \lambda_i(x_i')dx_i'\right) + \int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i - a_i(t-s)}^{x_i} \lambda_i(x_i')dx_i'\right)\times$$

$$\times V(s)F(x_1 - a_1(t-s), x_2 - a_2(t-s), x_3 - a_3(t-s); s)ds \equiv (H_2[V])\left(x_1, x_2, x_3, t\right).$$

(18_1)

Следовательно, с учетом (17) из (6) для решения обратной задачи получается система двух уравнений

$$\begin{cases} f = (H_2[V])\left(x_1, x_2, x_3, t\right), \forall\left(x_1, x_2, x_3, t\right) \in \Omega_1, \\ V = (F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t))^{-1}[f_1(t) - \int_0^t K(t,s)V(s)ds] \equiv (H_3[V])\left(t\right), \forall t \in [0, T_0], \end{cases}$$

(18_2)

где

$$\begin{cases} f_1(t) \equiv \varphi'(t) + \sum_{i=1}^{3} a_i f_{0l_i}(x_1^0 - a_1 t, x_2^0 - a_2 t, x_3^0 - a_3 t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i^0 - a_i t}^{x_i^0} \lambda_i(x_i')dx_i'\right) - f_0(x_1^0 - \\ -a_1 t, x_2^0 - a_2 t, x_3^0 - a_3 t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i^0 - a_i t}^{x_i^0} \lambda_i(x_i')dx_i'\right)[-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(x_i^0 - a_i t)], \\ K(t,s) \equiv \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i^0 - a_i(t-s)}^{x_i^0} \lambda_i(x_i')dx_i'\right)\{[-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(x_i^0 - a_i(t-s))]F(x_1^0 - a_1(t-s), x_2^0 - \\ -a_2(t-s), x_3^0 - a_3(t-s); s) - \sum_{i=1}^{3} a_i F_{h_i}(x_1^0 - a_1(t-s), x_2^0 - a_2(t-s), x_3^0 - a_3(t-s); s)\}, \\ l_i = x_i^0 - a_i t; \quad h_i = x_i^0 - a_i(t-s), \quad (i = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Отсюда видно, что второе уравнение (18_2) является уравнением Вольтерра второго рода, поэтому разрешимо в классе непрерывных функций. Тогда имеет место теорема вида:

Теорема 3. Обратная задача (16), (17) разрешима в классе функций W_C, так как система (18) разрешима в W_C.

Далее, учитывая результаты теоремы 1 и

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t) = f(x_1,x_2,x_3,t) + \xi_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t), \\ V_\varepsilon(t) = V(t) + \eta_\varepsilon(t), \end{cases} \qquad (19)$$

$$\begin{cases} \eta_\varepsilon(0)=0, \\ \xi_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,0)=0, \\ \xi_\varepsilon(x_1^0,x_2^0,x_3^0,t)=0, \end{cases}$$
(20)

из задачи (1) – (3) получим

$$\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_i}+(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(x_i))\xi_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t)=\eta_\varepsilon(t)F(x_1,x_2,x_3,t)-h(x_1,x_2,x_3,t)\times$$

$$\times\xi_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t)+\varepsilon(\xi_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,t)+f(x_1,x_2,x_3,t))[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t)+f(x_1^*,x_2^*,x_3^*,t))}{\partial x_i}],$$

$$\forall(x_1,x_2,x_3,t)\in\Omega_1.$$
(21)

Воспользуясь системой (8) из задачи (20), (21) имеем

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon=(\bar{H}_0[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},\xi_{\varepsilon x_3}])(x_1,x_2,x_3,t), \\ \xi_{\varepsilon x_i}=(\bar{H}_i[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},\xi_{\varepsilon x_3}])(x_1,x_2,x_3,t),(i=\overline{1,3}), \\ \eta_\varepsilon(t)=(\bar{H}[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},\xi_{\varepsilon x_3}])(t), \end{cases} \quad (22)$$

здесь

$$\begin{cases} (\bar{H}_0[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},\xi_{\varepsilon x_3}])(x_1,x_2,x_3,t)\equiv\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)\{\eta_\varepsilon(s)F(x_1- \\ -a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)-h(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)\times \\ \times\xi_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)+\varepsilon[\xi_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3- \\ -a_3(t-s);s)+f(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)]\times \\ \times[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,x_3^*,s))}{\partial x_i}]\}ds, \\ (\bar{H}_i[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},\xi_{\varepsilon x_3}])(x_1,x_2,x_3,t)\equiv\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)\times \\ \times\{[-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}(\lambda_i(x_i)-\lambda_i(x_i-a_i(t-s))](\eta_\varepsilon(s)F(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)- \\ -h(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)\xi_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3- \\ -a_3(t-s);s)+\varepsilon[\xi_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)+f(x_1-a_1(t-s),x_2- \\ -a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)]\times[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,x_3^*,s))}{\partial x_i}])+\sum_{i=1}^{3}\eta_\varepsilon(s)F_{l_i}(x_1- \\ -a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)-\sum_{i=1}^{3}h_{l_i}(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3- \\ -a_3(t-s);s)\xi_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),x_2-a_2(t-s),x_3-a_3(t-s);s)-\sum_{i=1}^{3}h(x_1-a_1(t-s),x_2- \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)\xi_{\varepsilon l_i}(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)+\\
+\varepsilon[\sum_{i=1}^{3}(\xi_{\varepsilon l_i}(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s), x_3-a_3(t-s);s)+f_{l_i}(x_1-a_1(t-s), x_2-a_2(t-s),\\
x_3-a_3(t-s);s))]\times[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)+f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s))}{\partial x_i}]\}ds, (i=\overline{1,3}),\\
(\bar{H}[\eta_\varepsilon, \xi_\varepsilon, \xi_{\varepsilon x_1}, \xi_{\varepsilon x_2}, \xi_{\varepsilon x_3}])(t)\equiv(F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t))^{-1}\{-[\varepsilon\varphi(t)[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)+f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s))}{\partial x_i}]+\\
+\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\int_{x_i^0-a_i(t-s)}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)\{[-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(x_i^0-a_i(t-s))](\eta_\varepsilon(s)F(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-\\
-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)+\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, s)+f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, s))}{\partial x_i}]\times\\
\times[\xi_\varepsilon(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)+f(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-\\
-a_3(t-s);s)]-h(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)\xi_\varepsilon(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-\\
-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s))-\sum_{i=1}^{3}\eta_\varepsilon(s)a_iF_{l_i}(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)+\\
+\sum_{i=1}^{3}a_ih_{l_i}(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)\xi_\varepsilon(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-\\
-a_3(t-s);s)+\sum_{i=1}^{3}a_ih(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)\xi_{\varepsilon l_i}(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-\\
-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)-\varepsilon[\sum_{i=1}^{3}a_i\xi_{\varepsilon l_i}(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)+\\
+\sum_{i=1}^{3}a_if_{l_i}(x_1^0-a_1(t-s), x_2^0-a_2(t-s), x_3^0-a_3(t-s);s)][\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s)+f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s))}{\partial x_i}]\}ds]\}
\end{cases}
$$

Далее, оценивая (22) в смысле W_C, при этом учитывая

$$\sum_{i=1}^{3}L_{\bar{H}_i}+L_{\bar{H}_0}+L_{\bar{H}}=d<1, \qquad (23)$$

где $L_{\bar{H}}, L_{\bar{H}_0}, L_{\bar{H}_i}, (i=\overline{1,3})-$ коэффициенты Липшица операторов $\bar{H}, \bar{H}_0, \bar{H}_i, (i=\overline{1,3}),$ получим

$$
\begin{cases}
\bar{E}_{m+1}\le d^{m+1}\bar{E}_0\xrightarrow[m\to\infty(d<1)]{}0,\\
\bar{E}_{m+1}=\left\|\xi_{\varepsilon,m+1}-\xi_\varepsilon\right\|_C+\sum_{i=1}^{3}\left\|\xi_{\varepsilon x_i,m+1}-\xi_{\varepsilon x_i}\right\|_C+\left\|\eta_{\varepsilon,m+1}-\eta_\varepsilon\right\|_C\le d^{m+1}\bar{E}_0\xrightarrow[m\to\infty(d<1)]{}0,
\end{cases}
$$

$$
\left\{\bar{E}_0=\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C+\sum_{i=1}^{3}\left\|\xi_{\varepsilon x_i}\right\|_C+\left\|\eta_\varepsilon\right\|_C,\right. \qquad (24)
$$

так как

$$\begin{cases} \xi_{\varepsilon,m+1} = (\bar{H}_0[\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, \xi_{\varepsilon x_3,m}])(x_1, x_2, x_3, t), (m = 1, 2, ...), \\ \xi_{\varepsilon x_i,m+1} = (\bar{H}_i[\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, \xi_{\varepsilon x_3,m}])(x_1, x_2, x_3, t), (i = \overline{1,3}), \\ \eta_{\varepsilon,m+1}(t) = (\bar{H}[\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, \xi_{\varepsilon x_3,m}])(t). \end{cases} \quad (25)$$

Тогда система (22) решена в W_C, причем, $\{\xi_{\varepsilon,m+1}\}$, $\{\eta_{\varepsilon,m+1}\}$ построены методом последовательных приближений: где $(\xi_0 = 0, \eta_0 = 0) -$ начальные приближения, при этом

$$\begin{cases} [\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, \xi_{\varepsilon x_3,m}] \xrightarrow[m\to\infty]{} [\eta_\varepsilon, \xi_\varepsilon, \xi_{\varepsilon x_1}, \xi_{\varepsilon x_2}, \xi_{\varepsilon x_3}], \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \Omega_1, \\ \bar{E}_0 = \|\xi_\varepsilon\|_C + \sum_{i=1}^{3} \|\xi_{\varepsilon x_i}\|_C + \|\eta_\varepsilon\|_C, \\ \bar{E}_0 \le (1-d)^{-1} \varepsilon \bar{Q}_0 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, (0 < \bar{Q}_0 = \text{const}). \end{cases}$$

(26)

Следовательно

$$(\eta_\varepsilon, \xi_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (0,0), \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \Omega_1. \quad (27)$$

Теорема 4. В условиях теорем 1, 3 и (27), устанавливается близость решений $(f_\varepsilon, V_\varepsilon)$ к (f, V) в смысле W_C, когда $\varepsilon \to 0$.

Литература

1. *Агошков В. И.* Некоторые вопросы теории приближенного решения задач о переносе частиц. – Москва: ОВМ АН СССР, 1984. 206 с.
2. *Арсеньев А. А.* Кинетические уравнения. – М.: Знание, 1985. 64 с.
3. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН СССР. М, 1961, № 61. С. 3158.
4. *Винг Дж. М.* Кинетическая теория и спектральные проблемы // теория ядерных реакторов: Сб. – М.: Госатомиздат, 1963. С. 160-171.
5. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
6. *Марчук Г. Н., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981. – 454 с.
7. *Найфе А.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. 455 с.
8. *Омуров Т. Д., Туганбаев М. М.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса. – Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
9. *Смелов В. Б.* Лекции по теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1978. 216 с.
10. *Султангазин У. М.* Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана. – Алма–Ата: Наука, 1985. – 192 с.
11. *Туганбаев М. М.* Прямые и обратные задачи для многоскоростных уравнений типа Каца – Больцмана. Бишкек : Илим, 2011. 122 с.
12. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 196 с.
13. Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana, Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams // Journal Math. Phys., - 1989. - Vol. 30. – No. 5, pp. 1177 - 1186.
14. Smith D. R., Palmer J. T. On the Behavior of the Solution of the Telegraphist's Equation for Large Absorption // Arch. Ration Mech. and Anal, 1970, 39, № 2, pp. 146 – 157.