

Моделирование стационарного критического тока в пленках высокотемпературных сверхпроводников

Другов А. А.

Другов Антон Александрович / Drugov Anton Aleksandrovich - студент,
кафедра высшей математики №1,

Национальный исследовательский университет, Московский институт электронной техники, г. Москва

Аннотация: в статье проводится детальное исследование задачи о депиннинге Абрикосовского вихря. Проводится численное моделирование и вычислительный эксперимент по исследованию стационарного состояния вихря в поле дефекта. Рассчитывается критическое значение средней плотности тока
Ключевые слова: высокотемпературный сверхпроводник, вихри Абрикосова, критический ток, решение нелинейной задачи

Введение

С появлением высокотемпературных сверхпроводников усилился интерес в их практическом применении для передачи энергии и создания мощных сверхпроводящих электромагнитов для ускорителей. Достаточно сильные магнитные поля, которые способны выдерживать эти сверхпроводники, позволяют использовать их в различного типа устройствах для создания сильного магнитного поля — системах магнитной подвески транспортных средств, устройствах удержания плазмы в термоядерных реакторах и т. д.

Существенным является вопрос максимального значения тока, при котором проводник сохраняет свои сверхпроводящие свойства. Токонесущая способность сверхпроводящего материала определяется значением максимальной (критической) плотности тока j_c , который может протекать в сверхпроводнике без диссипации энергии [1].

Величина j_c в сверхпроводниках зависит от способности материала закреплять вихри Абрикосова, движение которых приводит к появлению электрического поля в сверхпроводнике и, соответственно, его электрического сопротивления [2]. Наиболее эффективными центрами закрепления вихрей – пиннинга – служат протяженные линейные дефекты с радиусом, соизмеримым с длиной когерентности сверхпроводящего состояния (последняя для ВТСП материалов составляет единицы нанометров).

В этой связи актуальным является решение задачи об оценке и расчёте критического тока. В работе [3] был выполнен теоретический анализ этой проблемы. Получена теоретическая зависимость критического тока. Численным моделированием обнаружен порог неустойчивости связанного состояния вихря при увеличении тока, приводящей к депиннингу вихревой нити для конкретно заданных значений.

В настоящей работе выполнено дальнейшее и более детальное исследование рассматриваемой задачи о депиннинге Абрикосовского вихря. Проводится численное моделирование и вычислительный эксперимент по исследованию стационарного состояния вихря в поле дефекта. Рассчитывается критическое значение средней плотности тока.

Краевая задача

Задача о депиннинге Абрикосовского вихря рассматривается в рамках классической механики как задача о поведении упругой вихревой струны, помещенной в потенциальную яму, создаваемую линейным дефектом, и подверженной действию силы Лоренца $F_L(z) = [j(z) \times \phi_0]$ на вихрь в поверхностном экранирующем слое шириной λ вблизи поверхности образца, где λ – лондоновская глубина проникновения, ϕ_0 – квант потока, $j(z)$ – мейсснеровский ток.

При $T=0$ энергия одиночного вихря в потенциальной яме $U_p(s)$, создаваемой линейным дефектом в анизотропном сверхпроводнике в присутствии мейсснеровского тока, с учетом упругих свойств вихревой нити, может быть записана в виде (1) [4]:

$$W = \int_{-d/2}^{d/2} \left\{ \frac{P}{2} \left(\frac{\delta s}{\delta z} \right)^2 + U_p[s(z)] - \phi_0 j(z) s(z) \right\} dz \quad (1)$$

$s(z)$ – смещение вихря относительно оси линейного дефекта (оси z); P – линейное натяжение вихревой нити; $U_p(s)$ – потенциал пиннинга линейного дефекта; ϕ_0 – квант потока; d – толщина сверхпроводника (в дальнейшем предполагается $d \gg \lambda$).

Уравнение, определяющее стационарное состояние вихря, получается минимизацией функционала (1)

$$\min W_v \{s(z)\} \Rightarrow \frac{\delta W_v}{\delta s} = 0$$

для W и имеет вид:

$$P \frac{d^2 s}{dz^2} - \frac{dU_p(s)}{ds} + \phi_0 j(z) = 0 \quad (2)$$

Отсутствие на поверхности сверхпроводника нормальной компоненты сверхтекучего тока требует

$$\frac{ds}{dz} \Big|_{z=\pm d/2} = 0$$

нормального выхода вихревой нити на внешних поверхностях пластины: [3]. В результате приходим к следующей краевой задаче (КЗ):

$$P \frac{d^2 s}{dz^2} - \frac{dU_p(s)}{ds} + \phi_0 j(z) = 0, -d/2 \leq z \leq d/2$$

$$\frac{ds}{dz}(-d/2) = 0, \frac{ds}{dz}(d/2) = 0 \quad (3)$$

Для потенциала пиннинга $U_p(s)$ используется лоренцовская форма: $U_p(s) = -U_{p0} \frac{r_p^2}{r_p^2 + s^2}$, где

$U_{p0} = \varepsilon E_\varphi$ ($\varepsilon < 1$), $r_p \geq \xi$, $\xi \equiv \xi_{ab}$ – длина когерентности в плоскости сверхпроводящих слоев. Такой

вид потенциала $U_p(s)$, в частности, следует в рамках теории Гинзбурга-Ландау для модели пиннинга на цилиндрическом дефекте [5-6] и часто используется при решении различных задач, касающихся пиннинга вихрей на линейных дефектах.

Уравнение (2) и КЗ(3) являются сильно нелинейными.

Поведение сверхпроводника рассматривается в наклонном внешнем магнитном поле. Если θ – угол наклона вектора магнитного поля H , отсчитываемый от нормали к поверхности образца, то нормальная компонента поля входит в сверхпроводник в виде вихрей, а тангенциальная компонента $H_t = H \sin \theta$

создает поверхностный мейсснеровский ток $j_H = j_1 \sinh(z/\lambda)$, где $j_1 = \frac{H \sin \theta}{\lambda}$. Таким образом полный ток имеет вид:

$$j = j_0 \cosh(z/\lambda) + j_1 \sinh(z/\lambda) \quad (4)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к безразмерным переменным $z \rightarrow z/(d/2)$, $s \rightarrow s/r_p$, где r_p – эффективный радиус линейного дефекта ($r_p = \lambda$). Тогда приходим к следующей краевой задаче (КЗ):

$$\frac{d^2 s}{dz^2} - \frac{bs}{(1+s^2)^2} + a \cosh(\alpha z) + a_1 \sinh(\alpha z) = 0, -1 < z < 1$$

$$\frac{ds}{dz}(-1) = 0, \frac{ds}{dz}(1) = 0 \quad (5)$$

$$\text{где } a = \frac{\phi_0 d^2 j_0}{4 \text{Pr}_p}, a_1 = \frac{\phi_0 d^2 H \sin \theta}{4 \lambda \text{Pr}_p}, b = \frac{8U_{p0} d^2}{\text{Pr}_p^2}, \alpha = \frac{d}{2\lambda}.$$

Типичные значения параметров:

$$a \in [0, 3000], a_1 \in [0, a], b \in [1000, 112000], \alpha \in [0, 10].$$

Данная КЗ является задачей Неймана. Решение такой КЗ может не существовать или исчезать при определенных значениях параметров.

Численное решение

Из-за сильной нелинейности КЗ (5) не имеет аналитического решения и может быть решена только с помощью численных методов. Численное решение КЗ осуществлялось методом конечных разностей с использованием ньютоновских итераций по нелинейности и алгоритма прогонки, использованные в работе [3].

При написании программы было решено перейти от задачи Неймана к задаче Дирихле. Численно задавались параметры a, a_1, b, α , на левой границе сохранялось условие $\frac{ds}{dz}(-1) = 0$, а условие $\frac{ds}{dz}(1) = 0$ заменили на $s(1) = s_b$.

Варьируя значения s_b в некотором диапазоне $[0, s_{b\max}]$ с шагом s_b на каждом шаге решалась задача Дирихле. Анализировалось значение $\frac{ds}{dz}(1)$. Итерационный процесс останавливался тогда, когда на

правой границе выполнялось условие $|\frac{ds}{dz}(1)| < \varepsilon, \varepsilon = 10^{-12}$. В этом случае данное решение считалось решением краевой задачи. В противном случае s_b увеличивалось на s_b и алгоритм повторялся. Если в данном диапазоне решение не было найдено, то диапазон смещался $[s_{b\max}, s_{b\max}]$.

В случае, когда численный метод расходился, значение параметра a уменьшалось на 0.002. Если при a схема расходилась, а при $a-0.002$ сходилась, то значение a считалось критическим.

Для характеристики токонесущей способности сверхпроводника и сверхпроводниковой пленки на практике используется понятие средней плотности критического тока, которая определяется по формуле:

$$j_c(d) = \frac{j_{0c}(d)}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \cosh(z/\lambda) dz = \frac{2j_{0c}(d)}{d} \lambda \sinh\left(\frac{d}{2\lambda}\right), \quad (6)$$

Значение a_{cr} , позволяет рассчитать максимальное значение плотности тока, при котором сверхпроводник еще будет находиться в сверхпроводящем состоянии [9].

$$j_0^{cr} = \frac{4Pr_p}{\Phi_0 d^2} a^{cr} \quad (7)$$

Для оценки средней плотности критического тока можно провести оценку в относительных единицах:

$$\frac{j_c(d)}{j_c(\lambda)} = \frac{a_d^{cr} \lambda^3 \sinh\left(\frac{d}{2\lambda}\right)}{a_\lambda^{cr} d^3 \sinh\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (8)$$

Для каждого значения d были рассчитаны значения средней плотности критического тока. При увеличении d среднее значение плотности критического тока уменьшается. Результаты представлены в табл.1.

Таблица 1. – $j(d)$ -средняя плотность тока, полученная в численном эксперименте

d (нм)	200	400	600	1200	2000	3200	4000
b	277. 8	1111	2500	10^4	2.778×10^4	$7,11 \times 10^4$	$1,112 \times 10^5$
α	0,5	1	1,5	3	5	8	10
$j(d)/j(\lambda)$	1	0.823 9	0.652 8	0.358 8	0.2164	0.1352	0.1083

Сравнение численно полученных значений с теоретическими отображено на рис. 1.

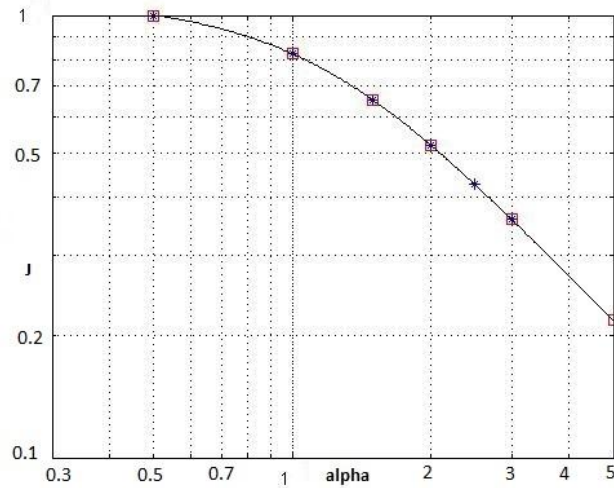


Рис. 1. Сравнение численных и теоретических результатов

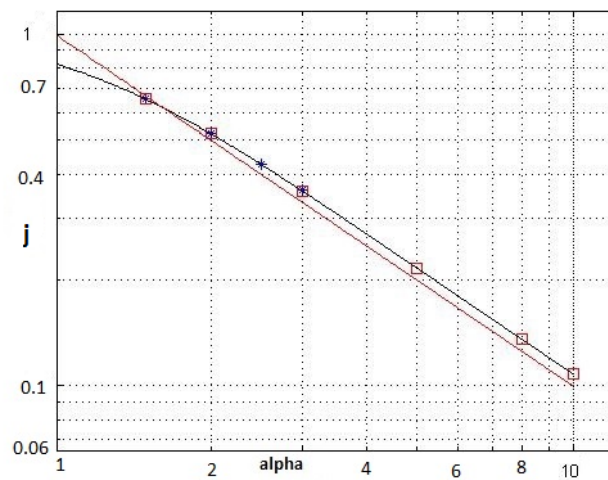


Рис. 2. Степенная аппроксимация полученных графиков в зависимости от α прямой x^{-1}

Для пленок с толщиной $d > \lambda$ был оценен показатель степени на асимптотике $\alpha > 1$ в приближённой степенной аппроксимации для средней критической плотности тока в относительных единицах от параметра α рис.2.

Полученное значение показателя степени при асимптотике показывает, что $J(d)$ обратно пропорционально d . Это согласуется экспериментальным результатам, в которых этот показатель степени при достаточно больших d находится вблизи -1.

Для каждого значения d из табл.1 находилось критическое значение параметра a в зависимости от a_1 . Таким образом были рассчитаны критические значения параметра a , которые приведены в таблице 2.

Таблица 2. Зависимость a_{cr} от a_1

b=277.8 $\alpha=0.5$		b=4445 $\alpha=2$		b=27780 $\alpha=5$		b=111200 $\alpha=10$	
a_{cr}	a_1	a_{cr}	a_1	a_{cr}	a_1	a_{cr}	a_1
83. 502	0	418. 802	0	133, 002	0	3. 592	0
80. 219	8.9 13	378, 002	4 2	119. 702	1 3.3	3. 233	0. 359

66. 302	44. 2	255, 002	1 70	79.8 02	5 3.2	2. 156	1. 436
43. 292	10 1.01	129. 302	3 01.7	39.9 02	9 3.1	1. 079	2. 513
0	21 0.9	0	4 36	0	1 33	0	3. 59

Для каждой комбинации параметров b и α видно, что зависимость $a_{cr}(a_1)$ имеет линейных характер, что соотносится с теоретической оценкой:

$$a_{cr} \approx a_{cr}^{(0)} \cdot \left(1 - a_1 \frac{\text{th}(\alpha)}{bu'_m}\right)$$

где $a_{cr}^{(0)}$ -это a_{cr} в задаче с перпендикулярным магнитным полем. При увеличении параметров b и α коэффициент наклона $a_{cr}(a_1)$ стремится к -1, что проиллюстрировано на рис. 3

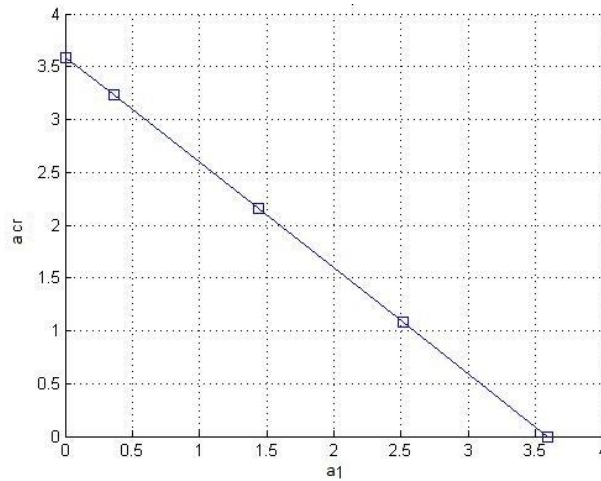


Рис. 1. Зависимость a_{cr} от a_1 при $b=111200$ $\alpha=10$

$$\frac{a_{cr}(a_1)}{a_0}$$

Для оценки зависимости $\frac{a_{cr}(a_1)}{a_0}$ от угла наклона магнитного внешнего поля произведем преобразование:

$$\frac{a_{cr}}{a_{cr}^{(0)}} \approx \left(1 - a_1 \frac{\text{th}(\alpha)}{bu'_m}\right) = (1 - \gamma \sin \theta);$$

$$\gamma = \beta H \frac{\text{th}(\alpha)}{bu'_m}; \quad \left| a_1 \frac{\text{th}(\alpha)}{bu'_m} \right| < 1$$

$$\frac{a_{cr}(a_1)}{a_0}$$

На рис.4 приведена зависимость $\frac{a_{cr}(a_1)}{a_0}$ от θ для различных γ

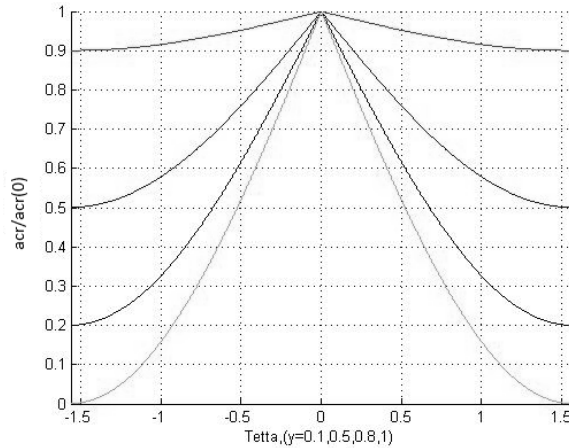


Рис. 4. Зависимость $a_{cr}(\theta)/a_0$ при $b=111200$ $\alpha=10$

$$a_{cr}(a_1)$$

При увеличении параметров b и α , значение a_0 при $\theta = \pm 1.5$ стремится к значению $1-\gamma$. Данные результаты хорошо соотносятся с экспериментами, приведенными на рис.5.

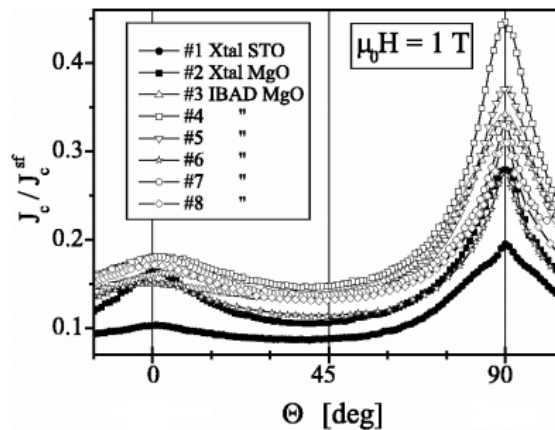


Рис. 2. Зависимость отношения критической средней плотности транспортного тока от угла тангенциальной составляющей магнитного поля [7]

Заключение и выводы

В работе проведено математическое моделирование стационарного состояния и депиннинга Абрикосовского вихря в пленках высокотемпературных сверхпроводников с линейными дефектами, выполнено численное исследование соответствующей краевой задачи.

Рассчитаны профили Абрикосовского вихря в поле линейного дефекта при наличии транспортного тока и магнитного поля.

Методом вычислительного эксперимента найдена точка бифуркации для ряда значений потенциала пиннинга и толщины пленки, соответствующая депиннингу вихря и критическому значению транспортного тока. Рассчитана средняя плотность критического тока, получена её зависимость от толщины сверхпроводящей пленки.

Найдена зависимость плотности критического тока от угла наклона магнитного поля для ряда значений потенциала пиннинга и толщины пленки

Результаты численных расчётов согласуются с теоретическими оценками [3] и предоставляют их численное обоснование.

Численные расчёты верифицировались с помощью аналитического решения в линейной аппроксимации при соответствующих значениях параметров и оценками функционала энергии, которые подтвердили достоверность полученных результатов и сравнивались с теоретическими оценками [3].

Полученные результаты находятся в качественном согласии с известными из литературных источников экспериментальными данными.

Дальнейшая работа в этой области представляет собой переход от стационарной задачи к нестационарной, исследование динамического процесса депининга, нахождение бистабильных состояний и моделирование движения вихря при токах, превышающих критическое значение.

Представленные в работе данные могут быть использованы при разработке силовых ВТСП кабелей с высокой токовой нагрузкой и малыми потерями для применения в электротехнике.

Литература

1. *Miura M., Maiorov B., Baily S. A., Haberkorn N., Willis J. O., Marken K., Izumi T., Shiohara Y., Civale L.* Mixed pinning landscape in nanoparticle-introduced YGdBa₂Cu₃O_y films grown by metal organic deposition // *Phys. Rev. B*, 2001. v. 83, № 18, 184519, p. 1-8.
2. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 511 с.
3. *Fedirko V. A., Kasatkin A. L. and Polyakov S. V.* Vortices Depinning and Critical Current in a Superconducting Slab with Linear Defects. Abstract Book of the Science and Application of Thin Films Conference and Exhibition - SATF-2014 (Sept 15-19, 2014, Cesme, Izmir, Turkey), p. 72.
4. *Касаткин А. Л., Цветковский В. П.* Депиннинг абрикосовских вихрей в анизотропных сверхпроводниках с протяженными линейными дефектами // *Металлофиз. новейшие технол.*, 2012, v. 34, № 7, с. 1001-1017.
5. *Blatter G. M., Feigel'man M. V., Geshkenbein V. B., Larkin A. I., Vinokur V. M.* // *Rev. Mod. Phys.*, 1994. V. 6, № 4, P. 1125 -1388.,
6. *Пашицкий Э. А., Вакарюк В. И.* // *Физика низких температур*, 2002. Т. 28, № 1. С. 16-23.
7. *Civale L., Maiorov B., Serquis A., Willis J. O., Coulter J. Y., Wang H., Jia Q. X., Arendt P. N., J. L. MacManus-Driscoll, M. P. Maley and S. R. Foltyn.* Angular-dependent vortex pinning mechanisms in YBa₂Cu₃O₇ coated conductors and thin films Superconductivity Technology Center, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545 ~Received 10 October 2003; accepted 6 January 2004.