О нестационарных системах массового обслуживания
Шлепкин А. А.

Шлепкин Алексей Анатольевич / Shlyopkin Alexey Anatolievich – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности, Институт космических и информационных технологий Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Аннотация: *в статье рассматриваются методы моделирования нестационарных систем массового обслуживания. Рассматривается их эффективность.*
Ключевые слова: *система массового обслуживания, вероятностная модель*

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) являются неотъемлемой частью нашей жизни (торговые предприятия, аэропорты, вокзалы, службы страхования, банки, телефонные станции, и т.д.). Вопрос эффективности их работы можно рассматривать, если только созданы их модели, проанализировав которые можно дать некоторые рекомендации руководству этих предприятий.

Модели СМО давно представлены двумя классами: стационарные и нестационарные. В случае стационарных моделей сложилась четкая теория, которая в некотором смысле является законченной. Для нестационарных моделей ситуация существенно сложнее. На это есть объективные причины. Дело в том, что модели СМО описываются с помощью системы линейных дифференциальных уравнений. Эта система дифференциальных уравнений решается для случая постоянных коэффициентов. Более того, если предположить, что вероятности как функции времени есть константы, то система дифференциальных уравнений становится просто системой линейных алгебраических уравнений, и все ее решения записываются в явном виде. Это и есть стационарный случай. Для нестационарного случая ни интенсивности потоков, ни вероятности не являются постоянными величинами, а являются функциями времени. Поэтому система дифференциальных уравнений, где коэффициенты не являются константами, а являются функциями времени, неразрешима в общем случае в явном виде [6]. В итоге приходится создавать модели СМО для каждой конкретной ситуации в нестационарном случае, учитывая особенности системы.

Основные определения

Коротко опишем основные элементы любой СМО.

1. Входящий поток требования (заявок) на обслуживание.

Обычно предполагается, что входящий поток заявок удовлетворяет условиям ординарности, отсутствия последействия. Эти условия обычно не обременительны и на практике выполняются. Поток требований характеризуется своей интенсивностью, то есть средним числом требований, поступающих за единицу времени. Интенсивность потока обозначим символом $x(t)$, где t - текущее время. В стационарных системах $x(t)=const$, для нестационарных систем $x(t)$ - это функция времени.

2. Обслуживающее устройство или канал обслуживания. Ясно, что обслуживающих устройств может быть несколько. Поэтому от числа обслуживающих устройств, организации их работы зависит качество и время обслуживания поступающего требования. Системы с несколькими каналами обслуживания называются многоканальными, с одним - одноканальными. Число обслуживающих устройств обозначают символом n.

3. Очередь. Все СМО можно разделить на два типа: системы с очередями и системы с отказами. Система с очередями означает, что если все обслуживающие каналы заняты, то заявка становится в очередь. Такие СМО наиболее распространены, и здесь именно они будут рассматриваться.

4. Выходящий поток требований. Этот элемент есть следствие работы обслуживающих устройств. Он характеризуется тоже своей интенсивностью, то есть средним числом обслуженных требований в единицу времени, и обозначим его символом $y(t)$.

5. Время обслуживания. Это время, в течение которого поступившая заявка обслужена, после чего она покидает СМО.

Так как число требований и время обслуживания являются случайными величинами, то модели СМО описываются вероятностными методами.

Вероятностное описание моделей СМО.

Пусть k - число обсуживающих устройств, n - число поступивших заявок на обслуживание. Состояние СМО и её работа описывается с помощью вероятностей $P_n(t)$. $P_n(t)$ - это вероятность того, что в момент времени t в системе с k каналами находится n заявок. Как было сказано во введении вероятности $P_n(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений. Сложности использования такой модели СМО для нестационарного случая были указаны во введении.

Известные методы создания моделей нестационарных СМО

Так как создание универсальной модели нестационарной СМО весьма затруднительно, то многие исследователи рассматривают конкретные СМО и разрабатывают для них специализированные модели.

Приведем обзор некоторых имеющихся моделей в настоящее время.

Многие авторы [7, 9, 10, 11] изучают работу узловых аэропортов, так называемых хабов. Методы, которые они используют для создания модели хаба как СМО, а затем и анализа, следующие:

1. Так как системы дифференциальных уравнений не решаются аналитически, то предлагаются расчетные алгоритмы по численному интегрированию.
2. Интенсивность входящего потока требований аппроксимируется тригонометрическими функциями. В частности, синусоидой (в силу цикличности колебания интенсивности входящего потока).
3. Рассматривается интенсивность входящего потока как кусочно-непрерывная функция, где участки непрерывности являются либо линейными функциями, либо константами.
4. Используются методы имитационного моделирования.

Основательной работой, где изучается железнодорожный транспорт как нестационарная СМО, является работа [1]. Здесь представлены модели СМО с использованием системы дифференциальных уравнений, графов, разработаны алгоритмы и комплексы программ для вычисления характеристик СМО.

Другой ряд авторов [2, 3, 8] изучает работу торговых предприятий, как нестационарных СМО, также большое внимание уделяет интенсивности потока входящих требований. На основе статистических наблюдений предлагаются конкретные функции, которые достаточно хорошо аппроксимируют x(t).

Имеется ряд публикаций [4, 5], посвященных работе страховых организаций как нестационарных СМО.

Приведенный обзор является далеко не полным. Но, тем не менее, понятно, что поле деятельности создания моделей нестационарных СМО остается по-прежнему обширным, если не сказать необъятным.

Алгоритм вычисления оптимального числа каналов

Пусть интенсивность входящего потока требований была ранее изучена и определено, что она равна x(t). Тогда можно найти вероятность поступления r требований в интервале времени (t,t+u), которую обозначим P(r). Разобьем рабочее время T СМО на s равных интервалов: $h_1,h_2,...,h_s$. Длину интервала обозначим l, тогда ls=T. В каждом h_i временном интервале находим вероятности наступления r_i заявок, где $r_i>=0$, i=1,...,s. Очевидно, что среди всех r_i интерес представляет то значение, которому соответствует максимальная вероятность. Обозначим это значение R_i. Мы предлагаем такой выбор R_i, основываясь на том, что событие, имеющее наибольшую вероятность, имеет большее количество шансов произойти, чем событие с меньшей вероятностью. Такой подход довольно часто используется в построении различных моделей. Например, в теории оценок параметров распределений - метод максимального правдоподобия, а в теории проверки статистических гипотез - выбор критической области.

Пусть k_i - количество каналов обслуживания в h_i временном интервале. Чтобы потребитель услуг чувствовал себя комфортно, нужно, чтобы очередь не росла неограниченно, с одной стороны, а с другой стороны, чтобы не было простоя некоторого количества обслуживающих устройств, их число не должно быть слишком большим. Чтобы выполнялись эти условия, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $R_i-y(t)k_i<=0$ для временного интервала h_i. Из этого неравенства можно найти k_i. Это число может быть дробным. Но так как число обслуживающих устройств должно быть целым числом, то для практических нужд нужно брать целую часть числа k_i. В заключение следует отметить, что интенсивность выходящего потока y(t) часто является постоянной величиной для конкретной СМО.

Литература

1. *Бубнов В. П.* Модели и методы исследования характеристик нестационарных процессов в системах массового обслуживания. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Санкт-Петербург, 2012. 203 с.
2. *Дуплякин В. М., Княжова Ю. В.* Имитационное моделирование нестационарных систем массового обслуживания торгового предприятия. Вестник Южно-Уральского государственного университета. № 41 (179), 2009. С. 79-84.
3. *Дуплякин В. М., Скогарева Ю. В.* Моделирование систем массового обслуживания торгового предприятия. Вестник Оренбургского государственного университета. № 1, 2009. С. 67-72.
4. *Кац В. М., Лившиц К. И., Назаров А. А.* Исследование нестационарных бесконечномерных систем массового обслуживания и их применение к анализу экономико-математических моделей. Вестник Томского государственного университета. № 275, 2002. С. 189-192.
5. *Назаров А. А.* Исследование процесса изменения числа заявок в нестационарной немарковской бесконечно-линейной системе массового обслуживания. Вестник Томского государственного университета. № 280, 2003. С. 230-231.
6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. «Наука», 1970. 280 с.

7. *Романенко В. А.* Оптимизация управления технологическими процессами узлового аэропорта как системы массового обслуживания с нестационарными потоками и частичной взаимозаменяемостью каналов. Управление большими системами, Вып. 36, 2012. С. 209-247.
8. *Фомин Г. П.* Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности. М. Финансы и статистика, 2000. 246 с.
9. *Bertsimas D. J., Odoni A. R., Peterson M. D.* // Models and algorithms for queening congestions at airports // Management science, 1995. № 41. P. 1279-1295.
10. *Kemppainen K., Nieminen J., Vepsalainen A. P.* Estimating the cost of airport congestion to fast connections. Journal of Air Transport Management, 2007. Vol. 13. Issue 4. P. 169-174.
11. *Frank M., Mederer M., Stoltz B., Hanschke T.* DE peaking – economic optimization of air traffic systems. Aerospace Science and Technology, 2007. № 9 (8). P. 738-744.