Решение систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов

Урдалетова А. Б.

Урдалетова Анаркуль Бурганаковна / Urdaletova Anarkul Burganakovna – кандидат физико-математических наук, профессор,
кафедра менеджмента, факультет экономики и управления,
Кыргызско-Турецкий университет «Манас», г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в статье предлагается алгоритм и приводятся формулы решения систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов методом, основанным на синтезе рекуррентной структуры метода Гаусса и простоты формул метода Крамера.*
Ключевые слова: *алгебраические системы уравнений, пятидиагональная матрица, алгоритм, метод.*

Введение

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится большинство задач вычислительной математики. Для этих задач характерным является большое число уравнений в соответствующей системе, что исключает возможность использования для ее решения известного из курса линейной алгебры метода Крамера. В работе [1] для решения системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов авторами был предложен алгоритм, сочетающий рекуррентную структуру метода Гаусса с формулами Крамера (в дальнейшем KG-алгоритм). В настоящей работе подобный подход используется для решения систем уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов.

Известно, что первые итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) были разработаны еще в XIX веке. Однако появление в XX столетии ЭВМ и их интенсивное проникновение, в первую очередь, в научно-практическую деятельность человека привело к резкому ускорению разработок и модификаций разнообразных вычислительных методов решения систем линейных уравнений. В частности, применение вычислительных методов оказалось особенно эффективным для решения задач теплообмена, динамики жидкостей, магнитной гидродинамики, переноса зарядов и многих других [2].

Современные методы решения подобных задач сводятся, как правило, к разностной аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений [3], [4], что, в свою очередь, приводит к построению СЛАУ, матрица которой имеет большую размерность и разреженно-упорядоченную структуру. Для одномерных по пространству задач матрица СЛАУ имеет трехдиагональную структуру [5]. Для двух- и трехмерных задач количество диагоналей возрастает, как правило, до пяти и семи соответственно. Это, казалось бы, небольшое изменение структуры матрицы сильно усложняет проблему решения подобной СЛАУ. До сих пор не удалось разработать прямой, экономичный, устойчивый к ошибкам округления метод, способный решать СЛАУ для многомерных по пространству задач за количество операций, пропорциональных числу неизвестных, наподобие того, как это было сделано для одномерного случая.

Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов:

$$\begin{cases} c_1x_1 + d_1x_2 + e_1x_3 = f_1; \\ b_2x_1 + c_2x_2 + d_2x_3 + e_2x_4 = f_2; \\ a_kx_{k-2} + b_kx_{k-1} + c_kx_k + d_kx_{k+1} + e_kx_{k+2} = f_k; \quad k = 3,4,\ldots,N-2; \\ a_{N-1}x_{N-3} + b_{N-1}x_{N-2} + c_{N-1}x_{N-1} + d_{N-1}x_N = f_{N-1}; \\ a_Nx_{N-2} + b_Nx_{N-1} + c_Nx_N = f_N. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь через x_i, $i=1,2,\ldots,N$, обозначены неизвестные; через a_m, b_m, c_m, d_m, e_m- коэффициенты, f_m - свободные члены уравнений системы.

Сначала укажем алгоритм и формулы для вычисления определителя матрицы коэффициентов системы, а затем алгоритм и формулы для вычисления решения системы (1).

1. Алгоритм и формулы для вычисления определителя

Для того чтобы воспользоваться формулой Крамера для решения системы уравнений (1), необходимо вычислить определитель матрицы коэффициентов этой системы. Для этого, последовательно найдем определители $D_{m,}$, задаваемые матрицей коэффициентов системы (1), где $m = 1, 2, \dots, N$. Тогда

$$D_m = \begin{vmatrix} c_m & d_m & e_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{m+1} & c_{m+1} & d_{m+1} & e_{m+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{m+2} & b_{m+2} & c_{m+2} & d_{m+2} & e_{m+2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{m+3} & b_{m+3} & c_{m+3} & d_{m+3} & e_{m+3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-3} & c_{N-3} & d_{N-3} & e_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & d_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_N & b_N & c_N \end{vmatrix}$$

Будем считать, что $D_{N+2} = 0; D_{N+1} = 1$. Это приведет нас к следующим формулам:

$$D_N = |c_N| = c_N = c_N D_{N+1};$$

$$D_{N-1} = \begin{vmatrix} c_{N-1} & d_{N-1} \\ b_N & c_N \end{vmatrix} = c_{N-1} \cdot c_N - d_{N-1} \cdot b_N = c_{N-1} \cdot D_N - d_{N-1} \cdot b_N D_{N+1}.$$

Согласно той же логике имеем:

$D_{N-2} = c_{N-2} \cdot D_{N-1} - d_{N-2} \cdot b_{N-1} \cdot D_N + [d_{N-2} \cdot d_{N-1} \cdot a_N + e_{N-2}(b_{N-1} \cdot b_N - c_{N-1} \cdot a_N]D_{N+1}$;

$D_{N-3} = c_{N-3} \cdot D_{N-2} - d_{N-3} \cdot b_{N-2} \cdot D_{N-1} + [d_{N-3} \cdot d_{N-2} \cdot a_{N-1} + e_{N-3}(b_{N-2} \cdot b_{N-1} - c_{N-2} \cdot a_{N-1})]D_N -$

$-[d_{N-3} \cdot e_{N-2} \cdot a_{N-1} \cdot b_N + e_{N-3}(b_{N-2} \cdot d_{N-1} - e_{N-2} \cdot a_{N-1}) \cdot a_N]D_{N+1}$.

Следующие определители можно вычислить по правилу:

$D_{N-t} = \{$в D_{N-t+1} все номера уменьшить на $1\} + (-1)^t\{M_{N-t} + L_{N-t}\}D_{N+1}$,

$t = 4, 5, \dots, N-1$.

Для того чтобы правило было законченным, необходимо сказать, что такое M_{N-t} и L_{N-t}.

Положим $M_{N-4} = d_{N-4} \cdot e_{N-3} \cdot a_{N-2} \cdot d_{N-1} \cdot a_N$; $L_{N-4} = e_{N-4} \cdot b_{N-3} \cdot e_{N-2} \cdot a_{N-1} \cdot b_N$.

Для $t = 5, 6, \dots, N-1$ значения M_{N-t} и L_{N-t} определим следующим образом:

$M_{N-t} = \{$в M_{N-t+1} все номера уменьшить на 1, а затем заменить d_{N-2} на $e_{N-2} \cdot b_{N}$, если t нечетное; заменить b_{N-1} на $d_{N-1} \cdot a_{N,}$ если t четное$\}$.

$L_{N-t} = \{$в L_{N-t+1} все номера уменьшить на 1, а затем заменить b_{N-1} на $d_{N-1} \cdot a_{N,,}$ если t нечетное; заменить d_{N-2} на $e_{N-2} \cdot b_{N,,}$ если t четное$\}$.

2. Алгоритм и формулы для решения системы уравнений

В этом пункте мы используем синтез методов Крамера и Гаусса (метод KG) для получения алгоритма и формулы решения системы уравнений (1).

а). Согласно формуле Крамера $x_1 = F_1/D_1$, где

$$F_1 = \begin{vmatrix} f_1 & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-3} & c_{N-3} & d_{N-3} & e_{N-3} & 0 \\ f_{N-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\ f_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & d_{N-1} \\ f_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_N & b_N & c_N \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы вычислить F_1 используем коэффициенты A_k, которые определим следующим образом:

$A_{-3} = A_{-2} = A_{-1} = 0; A_0 = 1;$

$A_k = A_{k-1}d_k - A_{k-2}e_{k-1}c_k + A_{k-3}e_{k-2}e_{k-1}b_k - A_{k-4}e_{k-3}e_{k-2}e_{k-1}a_k,$

где $k = 1, 2, \dots, N-1$.

При этом положим, что $e_{-3} = e_{-2} = e_{-1} = e_0 = 0$.

Также, нам понадобятся коэффициенты M_t, которые определим рекуррентным образом через $M_1 = b_3D_4 - d_3a_4D_5$; следующие коэффициенты M_t получатся, если число e_3a_4 умножить на число, которое получится, если в выражении M_{t-1} все индексы увеличить на 2.

Сумма коэффициентов M_t даст нам коэффициенты S_3 следующим образом: $S_3 = M_1 + M_2 + \dots + M_T$, где число T равно целой части отношения $(N - 1)/2$. Коэффициент S_{k+1} получается из предыдущего коэффициента $S_к$, если в выражении $S_к$ все индексы увеличить на 1.

Тогда $$F_1 = f_1D_2 - \sum_{k=2}^{N}(-1)^k f_k[A_{k-1}D_{k+1} + A_{k-2}e_{k-1}S_{k+1} + A_{k-3}e_{k-2}e_{k-1}a_{k+1}D_{k+2}].$$

б). Для того чтобы найти значение x_2, подставим найденное значение x_1 в систему (1), и исключив первое уравнение, получим систему уравнений порядка (N - 1) с неизвестными $x_2, x_3, \dots, x_N$ и пятидиагональной матрицей коэффициентов с определителем D_2. Тогда, $x_2 = F_2/D_2$.

Значение определителя F_2 посчитаем примерно так же, как значение F_1.

При этом, вместо A_k будет использовано B_k:

$B_0 = B_{-1} = B_{-2} = 0; B_1 = 1;$

$B_k = B_{k-1}d_k - B_{k-2}e_{k-1}c_k + B_{k-3}e_{k-2}e_{k-1}b_k - B_{k-4}e_{k-3}e_{k-2}e_{k-1}a_k,$

где $k = 2, 3, \dots, N-1$.

Тогда $$F_2 = \sum_{k=2}^{N}(-1)^k \overline{f_k}[B_{k-1}D_{k+1} + B_{k-2}e_{k-1}S_{k+1} + B_{k-3}e_{k-2}e_{k-1}a_{k+1}D_{k+2}].$$

Здесь $\overline{f_2} = f_2 - b_2x_1$; $\overline{f_3} = f_3 - a_3x_1$; $\overline{f_k} = f_k$, $k = 4,5,\dots,N.$

в). После того, как будет найдено значение x_2 из первого уравнения системы (1), найдем значение x_3, затем из второго уравнения - значение x_4 и так далее.

3. Тестовая система

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\
-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1; \\
2x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 - 2x_5 = 3; \\
-x_2 + 0x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 7; \\
0x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 + x_7 = -5; \\
3x_4 + 2x_5 + x_6 + 0x_7 = 4; \\
-2x_5 - x_6 + x_7 = -1.
\end{cases} \qquad (2)
$$

Для системы (2)

$D_9 = 0; D_8 = 1; D_7 = 1; D_6 = 1; D_5 = 4; D_4 = -12; D_3 = 0; D_2 = -18; D_1 = -24.$

$A_{-1} = 0; A_0 = 1; A_1 = 2; A_2 = 0; A_3 = 3; A_4 = 0; A_5 = 18; A_6 = 18.$

$B_0 = 0; B_1 = 1; B_2 = -3; B_3 = 3; B_4 = 0; B_5 = 0; A_6 = -36.$

$S_4 = 0; S_5 = 5; S_6 = 2; S_7 = -1; S_8 = 0.$

$x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 0; x_5 = 1; x_6 = 2; x_7 = 3.$

Литература

1. *Кыдыралиев С. К., Скляр С. Н., Урдалетова А. Б.* Использование метода KG для решения систем линейных алгебраических уравнений // Высшее образование Кыргызской Республики, 2008. № 12. С. 18-23.
2. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М. Мир, 1990, Т. 1. 384 с. Т. 2. 392 с.
3. *Ковеня В. М.* Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций. Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 2004. 146 с.
4. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
5. *Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.