

РАЗВЕРТЫВАНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА И НАНОСПУТНИКА

Ермаков С.Н. Email: Ermakov1135@scientifictext.ru

Ермаков Сергей Николаевич – магистрант,
кафедра программных систем, факультет информатики,
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, г. Самара

Аннотация: в статье рассматривается развертывание в вертикальное положение космической тросовой системы, состоящей из малого космического аппарата и наноспутника. Для описания движения системы используется математическая модель в геоцентрической системе координат, учитывающая растяжимость троса. Целью работы является изучение переходных процессов в системе регулирования при наличии возмущений по начальной скорости и направлению разделения космических аппаратов. Анализируется также влияние конечной длины троса и массы наноспутника на ошибки регулирования. Используется линейный регулятор по длине и скорости выпуска троса. Исследуется влияние коэффициентов обратной связи на переходные процессы в системе регулирования.
Ключевые слова: математическое моделирование, переходный процесс, линейный регулятор, космический аппарат, тросовая система.

MATHEMATICAL MODELING OF SMALL AND NANO SPACECRAFTS MOVEMENT IN THE COMPOSITION OF ORBITAL TETHER SYSTEM DEPLOY

Ermakov S.N.

Ermakov Sergei Nikolaevich – Candidate for a Master's degree,
DEPARTMENT OF PROGRAM SYSTEM, COMPUTER SCIENCE FACULTY,
SAMARA NATIONAL RESEARCH UNIVERCITY NAMED AFTER ACADEMICIAN S.P. KOROLEV, SAMARA

Abstract: this article describes the system of deployment of a small and nano spacecrafts movement tether system with transient response in vertical position. To describe the motion of the system, a mathematical model is used in the geocentric coordinate system, which takes into account the tether's extensibility. The purpose of this work is to analyze the transient processes of the system under consideration in the presence of perturbations in the initial velocity and he direction of spacecraft separation. The influence of the feedback coefficients on the deployment process and on the transient processes is also being analyzed in the article.
Keywords: mathematical modeling, transient response, linear regulator, spacecraft, tether system.

УДК 004.942

Введение

Рассматривается космическая тросовая система (КТС), состоящая из малого космического аппарата (МКА) и наноспутника (НС), соединенных тросом. Система движется по круговой околоземной орбите и развертывается в положение, близкое к вертикальному по заданной номинальной программе. Производится анализ переходных процессов по длине троса и его скорости, по отклонению от вертикали троса в конечном его положении при наличии ошибок разделения космических аппаратов.

Движение космической тросовой системы (КТС) описывается в неподвижной геоцентрической системе координат. Такое описание движения по сравнению с использованием орбитальной подвижной системы координат имеет ряд преимуществ [1]. Учитываются:

- растяжимость троса;
- провисание троса;
- инерционность механизма управления;
- контур обратной связи.

В работе не учитывается масса троса, так как его конечная длина относительно невелика. Поэтому такая модель вполне пригодна для решения поставленной задачи. Помимо невесомости троса в работе имеются следующие допущения:

- Используется центральное сферическое гравитационное поле;
- КА представляют собой материальные точки;
- Аэродинамические силы не учитываются;
- Инерционность механизма управления постоянна.
- Используется идеальный регулятор без учета дискретности работы системы управления, ошибок измерений и других возмущений, свойственных реальной системе управления.

Математическая модель

Математическая модель представлена в виде системы дифференциальных уравнений [1]. Уравнения движения КТС на орбите имеют вид:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V}_k, \quad m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{G}_k + \vec{T}_k \quad (1)$$

где $k = 1, 2$ – индексы, соответствующие нано и малому КА; \vec{r}_k, \vec{V}_k – радиусы вектора и скорости в геоцентрической системе координат; m_k – массы тел; $\vec{G}_k = -K \frac{m_k \vec{r}_k}{r_k^3}$ –

гравитационные силы в центральном поле Земли; $\vec{T}_2 = T \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ ($\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$) – силы упругости,

действующие на груз и КА соответственно; T – модуль силы упругости.

Так как трос не работает на сжатие, то модуль силы упругости вычисляется по закону Гука из выражения [1]:

$$T = \begin{cases} c \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - L}{L}, & \text{if } |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - L \geq 0 \\ 0, & \text{if } |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - L < 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где L – нерастянутая длина выпущенного из механизма троса, $c = EA$ – коэффициент упругости, E – модуль Юнга, $A = \frac{\pi d_T^2}{4}$ – площадь поперечного сечения троса, d_T – диаметр троса.

К этим уравнениям необходимо присоединить уравнения, описывающие работу тормозного механизма. Для случая, когда инерционность механизма управления постоянна ($m_M = const$), эти уравнения имеют вид [1]:

$$m_M \frac{dV_L}{dt} = T - F_c, \quad \frac{dL}{dt} = V_L, \quad (3)$$

где L и V_L – нерастянутая длина троса и его скорость выпуска, F_c – сила в механизме управления, m_M – коэффициент, характеризующий инерционность механизма управления.

В данной работе используется следующее уравнение для управляющей силы:

$$F_c = F_{cn} + K_L \Delta L + K_V \Delta V \quad (4)$$

где K_L, K_V – коэффициенты регулирования, F_{cn} – номинальное значение управляющей силы в тормозном механизме, $\Delta L = L - L_n$ и $\Delta V = V_L - V_n$ – ошибки управления, L_n и V_n – номинальные значения длины и скорости выпуска троса. В данной работе коэффициенты обратной связи K_L, K_V принимаются постоянными.

Номинальные значения длины L_n и V_n описываются системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\ddot{L}_n = L_n [(\dot{\theta}_n + \Omega)^2 - \Omega^2 (1 - 3 \cos^2 \theta_n)] - \frac{F_{cn}}{m_1}, \quad (5)$$

$$\ddot{\theta}_n = -2 \frac{\dot{L}_n}{L_n} (\dot{\theta}_n + \Omega) - \frac{3}{2} \Omega^2 \sin(2\theta_n) \quad (6)$$

где m_1 – масса наноспутника, m_2 – масса малого КА, F_{cn} – закон развертывания для номинальной силы, Ω – средняя угловая скорость вращения центра масс системы по орбите, θ – угол отклонения троса от вертикали.

Закон развертывания для номинальной силы F_{cn} имеет вид [5]:

$$F_{cn} = m_1 \Omega^2 \left[a(L_n - L_K) + b \frac{V_L}{\Omega} + 3L_K \right] \quad (7)$$

$$\Omega = \sqrt{K / (R_3 + H)^3} \quad (8)$$

где L_K – конечная длина троса, a, b – параметры закона, Ω – средняя угловая скорость вращения по орбите, $K = 398600.02 \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравитационный параметр Земли, R_3 – средний радиус Земли, H – расстояние от поверхности Земли до центра масс КТС.

В процессе моделирования работы системы управления необходимо учитывать ряд ограничений:

1 Ограничение на управляющие воздействия. В силу того, что возможности механизма управления ограничены, то управляющая сила принимает значения только в допустимом диапазоне:

$$F_{c \min} \leq F_c \leq F_{c \max};$$

2 Ограничение на скорость. Так как используется механизм управления, который не может втягивать трос обратно, то $V_L \geq 0$.

Здесь рассматривается «идеальный» регулятор, то есть не учитываются ошибки измерений длины и скорости троса, дискретности управления, запаздывания при функционировании отдельных устройств и др. возмущения, свойственные реальным системам регулирования.

Принципиальная схема системы регулирования представлена на рисунке 1.

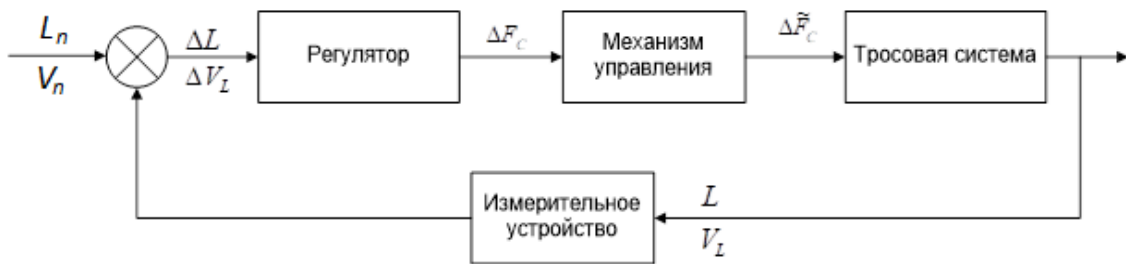


Рис. 1. Принципиальная схема системы регулирования

Математическое моделирование

Для упрощения решения задач на ЭВМ необходимо привести систему уравнений (1-8) в нормальную форму Коши:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 \\
\frac{d\dot{x}_1}{dt} &= G_{x1} + T_{x1} \\
\frac{d\dot{x}_2}{dt} &= G_{x2} + T_{x2} \\
\frac{dy_1}{dt} &= \dot{y}_1 \\
\frac{dy_2}{dt} &= \dot{y}_2 \\
\frac{d\dot{y}_1}{dt} &= G_{y1} + T_{y1} \\
\frac{d\dot{y}_2}{dt} &= G_{y2} + T_{y2} \\
\frac{dL}{dt} &= V_L \\
\frac{dV_L}{dt} &= \frac{T - F_c}{m_3} \\
\frac{d\dot{L}_n}{dt} &= L_n [(\dot{\theta}_n + \Omega)^2 - \Omega^2 (1 - 3 \cos^2 \theta_n)] - \frac{F_{cn}}{m_1} \\
\frac{d\dot{\theta}_n}{dt} &= -2 \frac{\dot{L}_n}{L_n} (\dot{\theta}_n + \Omega) - \frac{3}{2} \Omega^2 \sin(2\theta_n)
\end{aligned} \tag{9}$$

Такое представление позволяет использовать распространённые методы интегрирования, например, метод Эйлера или Рунге-Кутты.

Разработанное программное обеспечение

Для анализа переходных процессов в системе регулирования было разработано ПО, позволяющее автоматизировать процесс анализа поведения системы (рисунок 2). Программа упрощает задание возмущений, анализ отображаемых зависимостей, задание параметров метода интегрирования

При моделировании рассматривалась КТС со следующими параметрами: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 100$ кг и $m_3 = 0.2$ кг, $L_k = 3000$ м, $a = 4.7$ и $b = 4$, $K_L = 1$, $K_V = 1$, $L = 1$ и $V = 2.5$, $\theta = 0$ град и $\frac{d\theta}{dt} = 0$ град/с, $K = 398600.02 \text{ км}^3 / \text{с}^2$, $E = 2.5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $d_T = 0.0006 \text{ м}$, $H = 300\,000 \text{ м}$, $R_3 = 6371020 \text{ м}$.

Анализ переходных процессов

Зададим возмущение по скорости отделения 0.5 м/с и сравниваем графики переходных процессов (рисунки 2 и 3).

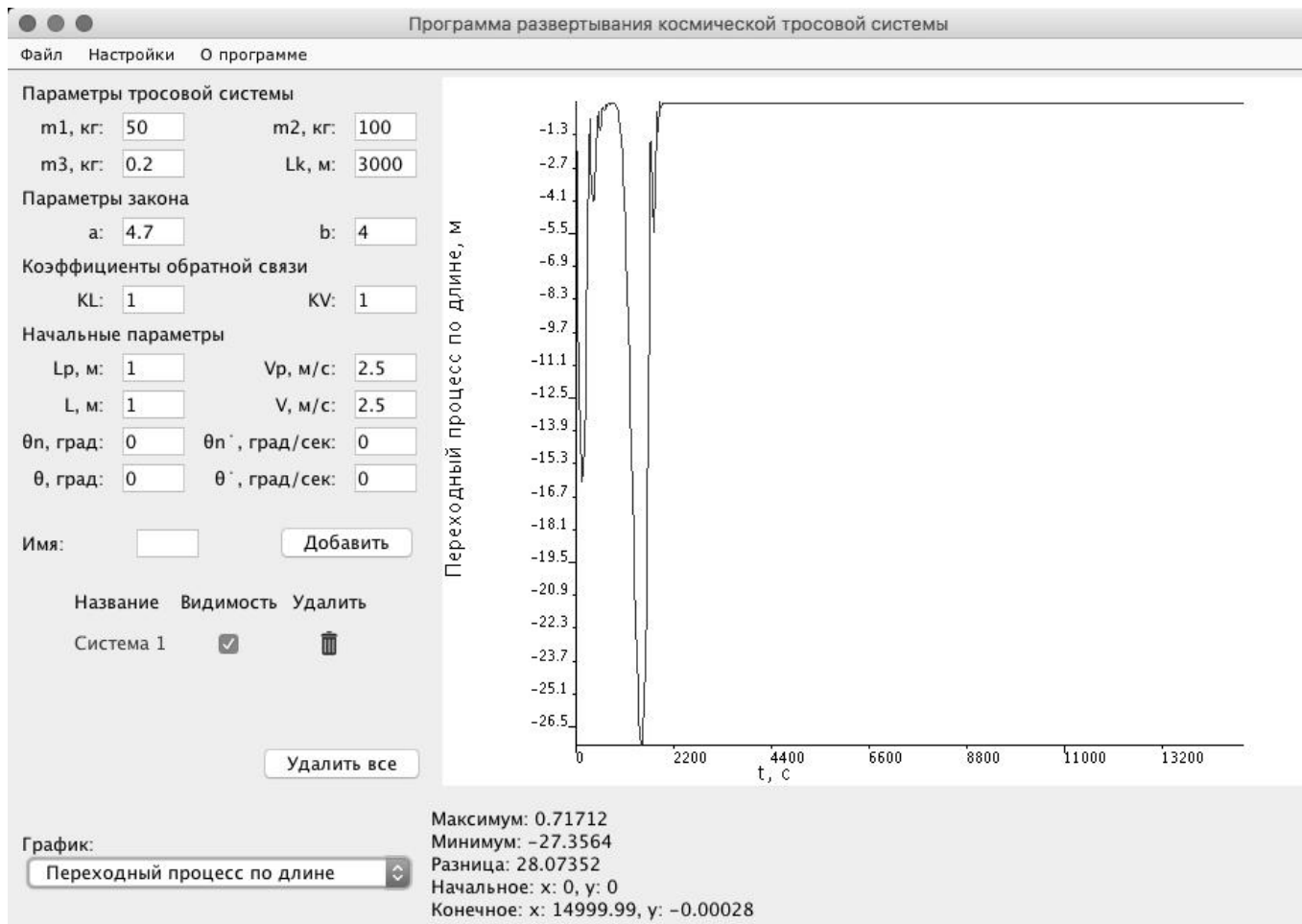


Рис. 2. Переходный процесс по длине при возмущении по скорости 0.5 м/с

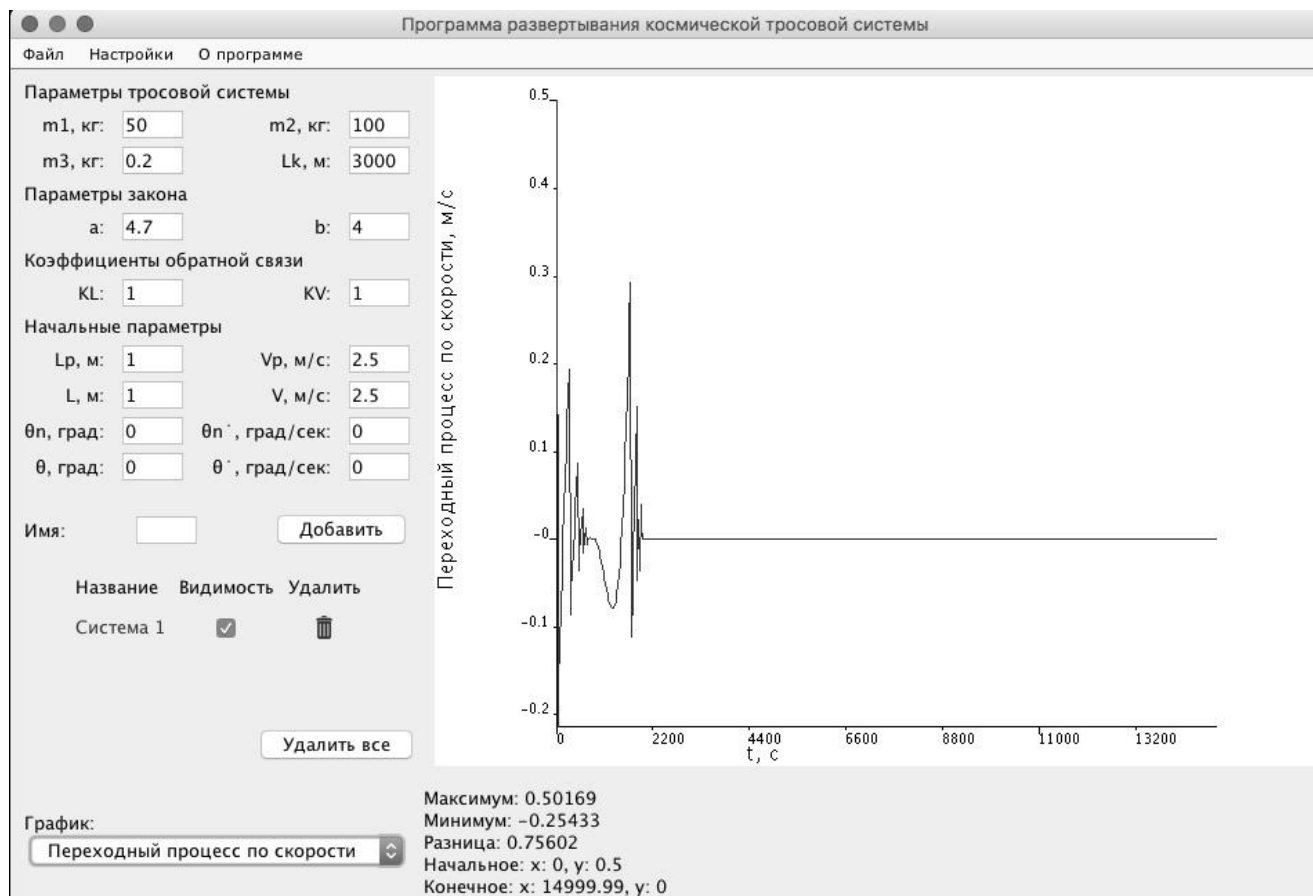


Рис. 3. Переходный процесс по скорости при возмущении по скорости 0.5 м/с

Оба графика демонстрируют значительное увеличение колебаний в начальный момент времени (примерно до 2400 с). Далее система стабилизируется и выпуск происходит в соответствии с номинальной программой.

Максимальная амплитуда по длине составляет 27.35 метров, а по скорости 0.5 м/с, конечная ошибка по длине составляет ~0 м, по скорости ~0 м/с.

Аналогичным образом произведем анализ переходных процессов с возмущениями по отклонению от вертикали и рассмотрим устойчивость системы при увеличении конечной длины троса. Полученные данные отображены в таблице 1.

Таблица 1. Ошибки системы при начальных возмущениях

Длина троса / Возмущение	По длине: максимальная ошибка / конечная ошибка	По скорости: максимальная ошибка / конечная ошибка	По отклонению от вертикали: максимальная ошибка
3000 м / 0.5 м/с по скорости	27 м / 0.0004 м	0.5 м/с / ~ 0 м/с	0.83 град
10 000 м / Возмущений нет	5 м / 0.29 м	5 м/с / ~ 0 м/с	35.9 град
3000 м /	26 м / ~ 0 м	0.29 м/с / ~ 0 м/с	20 град, колебания с

Начальное отклонение от вертикали 20 градусов			амплитудой < 0.05 град
---	--	--	------------------------

Результаты анализа переходных процессов

В ходе проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Переходные процессы по всем возмущениям имеют колебательный характер.
2. Отклонения всех рассматриваемых характеристик от номинальных значений для всех переходных процессов при возмущениях по скорости (0.5 м/с) и отклонениях по вертикали (20 град) стремятся к нулю.
3. Приближенное время переходных процессов по всем рассмотренным характеристикам при возмущениях по скорости (0.5 м/с) составляет 1200 секунд, при отклонении по вертикали (20 градусов) 600 секунд. Так как отклонения стремятся к нулю, то процессам характерно свойство асимптотической устойчивости.
4. Конечные ошибки для рассмотренных переходных процессов показаны в таблице 1 и составляют:
 - a. по скорости: $\Delta L = 27 м$ и отклонению $\Delta \theta = 0.83 град$ ($\Delta x = 48.58 м$ и $\Delta y = 0.006 м$);
 - b. по отклонению от вертикали: $\Delta L = 26 м$ и отклонению $\Delta \theta = 0.05 град$ ($\Delta x = 1.144 м$ и $\Delta y \approx 0 м$).
5. Анализ переходных процессов при увеличении длины троса показал, что время переходного процесса при длине $L = 10\ 000 м$ увеличилось с 800 секунд по 4800 секунд. Конечные ошибки по длине составляют $\Delta L \approx 0 м$. В конечном положении имеют место колебания троса относительно вертикали с периодом 3000 секунд и амплитудой 30 градусов ($\Delta x = 5773 м$). При конечной длине $L = 30\ 000 м$ конечная амплитуда составляет 40 градусов. Поэтому с увеличением длины троса работа системы регулирования становится неустойчивой.
6. Движение КТС при работе системы регулирования устойчиво при массе малого космического аппарата 100 кг и при массе нано спутника 4кг и при длине троса, не превышающей 3000 м.
7. По результатам исследований можно рекомендовать следующие значения коэффициентов обратной связи: $K_L = 1$ и $K_V = 10$. Эти значения обеспечивают наименьшие ошибки по скорости и длине троса, по отклонениям троса от вертикали в конечном положении.

Список литературы / References

1. Заболотнов Ю.М. Практикум по динамике и управлению движением космических тросовых систем / Ю.М. Заболотнов. Самара: СГАУ, 2016. 103 с.
2. Заболотнов Ю.М. Введение в динамику и управление движением космических тросовых систем / Ю.М. Заболотнов. Пекин: Science Press, 2013. 140 с.
3. Заболотнов Ю.М. Управление разворачиванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом / Ю.М. Заболотнов // Прикладная математика и механика, 2015. Том 79. Вып. 1. С. 37–47.
4. Белецкий В.В. Динамика космических тросовых систем / В.В. Белецкий, Е.М. Левин. М.: Наука. Гл. ред. Физ.–мат. лит., 1990. 336 с.