ФОРМАЛИЗМ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОСТИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ОБОБЩЕННОЙ АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА

Бабаев А.Х. Email: Babaev1137@scientifictext.ru

Бабаев Алимжан Холмуратович – кандидат физико-матемаматических наук, пенсионер, г. Новосибирк

Аннотация: *в статье представляется формализм на основе обобщенной алгебры Клиффорда в криволинейных координатах. Две независимые (однородная $\nabla \wedge F = 0$ и неоднородная $\nabla \cdot F = J$) системы уравнений Максвелла объединены в единое уравнение в рамках модели неоднородности векторного поля. Получены уравнения непрерывности и нетривиальный закон сохранения вихревого 4-х тока, который является количественным описанием закона Ленца. Доказана эквивалентность неоднородной системы Максвелла и уравнений Эйнштейна в рамках данного метода. Предполагается, что гравитация и электромагнетизм – это две стороны одного и того же явления.*

Ключевые слова: *произведения Клиффорда векторов, уравнения Максвелла, уравнения Эйнштейна, электромагнитный 4 – ток, уравнение непрерывности; вихревой 4 – ток, эквивалентность электромагнетизма и гравитации.*

THE FORMALISM BASED ON THE MODEL OF THE VECTOR FIELD INHOMOGENEITY IN THE GENERALIZED CLIFFORD ALGEBRA

Babaev A.Kh.

Babaev Alimjan Kholmuratovich, – PhD in Physicist-Mathematician, Associate Professor, Retired, Novosibirsk

Abstract: *in the paper the formalism based on the generalized Clifford algebra (the curvilinear coordinate's case) was proposed. Two independent (homogeneous $\nabla \wedge F = 0$ and inhomogeneous $\nabla \cdot F = J$) systems of Maxwell equations were unified into a single equation by the model of the vector field inhomogeneity. The continuity equation was obtained. Also it was found the quantitative description of the conservation law of the eddy 4 – current that is the Lenz's law. The equivalence of the inhomogeneous Maxwell system and Einstein's equations was shown on this formalism. It is assumed that gravity and electromagnetism are two sides of the same phenomenon.*

Keywords: *Clifford product of vectors, Maxwell's equations, Einstein field equations, electromagnetic 4 – current, continuity equation, eddy 4 – current, equivalence of Electromagnetism and Gravity.*

УДК 514.764.21; 514.74; 537.8

Введение

Целью данной работы является показать формализм объедения однородной и неоднородной систем Максвелла [1] в единое уравнение, используя методы обобщенной алгебры Клиффорда. Более универсальный математический аппарат геометрической алгебры позволяет доказать эквивалентность уравнений Максвелла и Эйнштейна.

Теоретические основы

Как меру локальной неоднородности электромагнитного поля с 4-х потенциалом A используем выражение:

$$B = \nabla A, \qquad (1)$$

$\nabla = e^i \nabla_i$ – оператор набла.

Вместо ортонормированного базиса берем канонический базис из матриц Дирака:

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = \pm I \delta_{ij}, \qquad (2)$$

где γ_i – матрицы Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера, I – единичная матрица.

Если $i = j = 0$, то в равенстве (2) берем знак «+», если нет, то знак «-».

Для векторов $e_j = \gamma_k \partial_j X^k$ криволинейного базиса используем произведения Клиффорда [2]:

$$e^i e^j = e^i \cdot e^j + e^i \wedge e^j \,, \qquad (3)$$

где X^k– функции от $\{q^i\}$,

внутреннее произведение (inner product) – $e^i \cdot e^j = 0.5(e^i e^j + e^j e^i)$ (4)

внешнее произведение (outer product) – $e^i \wedge e^j = 0.5(e^i e^j - e^j e^i)$ (5)

Тогда неоднородность (1) в координатной форме имеет вид:

$$B = e^i \cdot e^j \nabla_i A_j + e^i \wedge e^j \nabla_i A_j, \qquad (6)$$

где $e^i \cdot e^j = g^{ij}$ – метрический тензор, $e^i \wedge e^j = \tau^{ij}$ – антисимметричный тензор второго ранга или бивектор.

Результаты

1. **Уравнения Максвелла**.

Из равенства (1) берём градиент:

$$\nabla B = \nabla(\nabla \mathrm{A}) \qquad (7)$$

Согласно произведению Клиффорда имеем

$$\nabla B = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{A}) + \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathrm{A}) + \nabla \wedge \nabla \wedge \mathrm{A} \qquad (8)$$

Уравнение (8) – есть единое уравнение электромагнетизма.

1.1 *Однородное уравнение Максвелла.*

Утверждение. В уравнении (8)

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathrm{A} = 0, \qquad (9)$$

а уравнение (9) – есть однородная система уравнений Максвелла:

$$\nabla \wedge F = 0 \qquad (10).$$

$F = \nabla \wedge \mathrm{A}$ – тензор электромагнитного поля.

Доказательство утверждения смотреть в [3].

1.2 *4-х мерный электромагнитный ток.*

В уравнении (8) 4-х ток обозначим в виде

$$J = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{A}) \qquad (11)$$

Согласно (11) 4-х ток имеет явный геометрический смысл:

4-х ток – есть 4-х градиент от 4-х дивергенции потенциала А.

Если $\nabla \cdot \mathrm{A} = divA \neq \mathrm{const}$, то пространство имеет «дыры» («сгущения», если $g^{0i}\nabla_0 A^i \neq \mathrm{const}$) - «стоки» и/или «истоки». Согласно принятой терминологии, заряд бывает либо положительный – исток, когда $q = \partial_t(\nabla \cdot \mathrm{A}) > 0$, либо отрицательный – сток, когда $q = \partial_t(\nabla \cdot \mathrm{A}) < 0$. Заметим, что «дыры» пространства могут содержать в себе сингулярность.

1.5 *Неоднородное уравнение Максвелла.*

Учитывая (9), (10) и (11), уравнение (8) запишем в виде:

$$\nabla B = J + \nabla \cdot F \qquad (12)$$

Предположим, что

$$\nabla B = \mu T \cdot A, \qquad (13)$$

где T – тензор энергии-импульса; μ – постоянный коэффициент.

Тогда из уравнения (12) получим неоднородное уравнение Максвелла:

$$\nabla \cdot F = \mu T \cdot A - J \qquad (14)$$

При $\mu T \cdot A \approx 0$ мы получим классическое выражение уравнения Максвелла (с точностью до постоянного вектора, если $\mu T \cdot A = const$).

Новая форма записи неоднородной системы Максвелла (14) означает, что энергия дает вклад в 4-х электрический ток. При больших энергиях разность $\mu T \cdot A - J$ будет меньше (при $\mu T \cdot A < J$), чем в классическом случае. При очень больших энергиях будет $\mu T \cdot A > J$, т.е. заряд может менять направление на противоположное. Зависимость 4-х тока от энергии - импульса не означает, что при высоких энергиях неоднородная система Максвелла нарушается. Она становится нелинейной.

Вероятно, с формулой (14) связана «бегучесть» угла Вайнберга, предсказанная в Стандартной модели [4] и подтвержденная в эксперименте [5]. Также «бегучесть констант», возможно, и «конфайнмент» связаны с вкладом энергии в 4-х ток.

2. Сохранение 4-х тока.

Берем градиент из уравнения (12):

$$\nabla(\nabla B) = \nabla J + \nabla(\nabla \cdot F) \qquad (15)$$

С учетом (13) уравнение (15) имеет вид:

$$\nabla(\mu T \cdot A) = \nabla J + \nabla(\nabla \cdot F) \qquad (16)$$

Разделяя (16) на симметричную (внутреннее произведение) и антисимметричную (внешнее произведение) части, получим:

$$\nabla \cdot (\mu T \cdot A) = \nabla \cdot J + \nabla \cdot (\nabla \cdot F) \qquad (17)$$

$$\nabla \wedge (\mu T \cdot A) = \nabla \wedge J + \nabla \wedge (\nabla \cdot F) \qquad (18)$$

2.1 *Уравнение непрерывности для 4-х тока.*

Утверждение. В уравнении (17) имеет место равенство:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot F) = 0 \qquad (19)$$

Тогда из уравнения (17) получим уравнение непрерывности для 4-х тока:

$$\nabla \cdot (\mu T \cdot A - J) = 0. \qquad (20)$$

Уравнение (20) – есть уравнение непрерывности для 4-х тока.

Доказательство утверждения (19) смотреть в [6].

Если $T = const$, в частности $T \approx 0$, то мы получим классическое уравнение непрерывности для 4-х тока.

Предположим, что $\mu T \cdot A \neq const$. Преобразуем уравнение (20).

$$\nabla \cdot (\mu T \cdot A) = \mu g^{nk} \nabla_n \big(g^{ij} T_{kj} A_i \big) = \mu g^{nk} g^{ij} \big(T_{kj;n} A_i + T_{kj} A_{i;n} \big)$$

Так как $\mu g^{nk} g^{ij} T_{kj;n} A_i = 0$, то получим

$$\nabla \cdot (\mu T \cdot A) = \mu T^{nj} A_{i;n} \qquad (21)$$

Мы получили уравнение неразрывности 4-х тока в общем виде:

$$\mu T_n^k A_{;k}^n = J_{;k}^k \qquad (22)$$

Уравнение (22) – в общем случае дифференциальная форма закона сохранения энергии – импульса в элементарном объёме.

Увеличение 4-х тока ($J_{;k}^k > 0$) или уменьшение ($J_{;k}^k < 0$) из-за внешнего воздействия приводит к увеличению или уменьшению деформации 4-х потенциала – $\mu T_n^k A_{;k}^n$ [7].

Преобразуем (22):

$$\mu T_n^k A_{;k}^n = 0.5\mu \big(g^{nk} g^{ij} T_{ki} A_{j;n} + g^{nk} g^{ij} T_{ki} A_{j;n} \big) \Rightarrow$$
$$\mu T_n^k A_{;k}^n = 0.5\mu g^{nk} g^{ij} T_{ki} \varepsilon_{jn} = 0.5\mu T^{ik} \varepsilon_{ik}$$

где $\varepsilon_{ik} = 0.5(A_{j;n} + A_{n;j})$ – 4-х мерный тензор деформации поля A.

Теперь уравнение непрерывности (22) можно записать в виде:

$$0.5\mu T^{ik} \varepsilon_{ik} = J_{;k}^k \qquad (23)$$

Мы получили закон сохранения 4-х тока в общем случае.

Согласно (23), изменение деформации поля порождает изменение 4-х тока и наоборот.

2.2 *Сохранение вихревого 4-х тока.*

Теперь рассмотрим уравнение (18). Так как $\nabla_i A^i$ скалярная величина, то имеет место равенство:

$$\nabla \wedge J = 0, \qquad (24)$$

Уравнение (24) – есть закон сохранения вихревого 4-х тока.

Уравнение (24) запишем в «привычном» 3-х мерном виде:

$e^n \wedge e^k \nabla_n J_k = e^\alpha \wedge e^0 \nabla_\alpha J_0 + \nabla_0 (e^0 \wedge e^\alpha J_\alpha) + e^\beta \wedge e^\mu (\nabla_\beta J_\mu - \nabla_\mu J_\beta),$

где $\alpha, \beta, \mu = 1,2,3$, также $\beta < \mu$.

Согласно уравнению (Т.11)

$e^\beta \wedge e^\mu \big(\nabla_\beta J_\mu - \nabla_\mu J_\beta \big) = \gamma E^{\beta\mu\lambda 0} e_\lambda \wedge e_0 \big(\nabla_\beta J_\mu - \nabla_\mu J_\beta \big) = -rot\boldsymbol{J}.$

Обозначая $e^0 \wedge e^\alpha J_\alpha = -\boldsymbol{J}$; $J_0 = \rho$; $e^\alpha \wedge e^0 \nabla_\alpha = \boldsymbol{\nabla}$, уравнение (24) запишем в 3-х мерном виде:

$$\boldsymbol{\nabla}\rho = \nabla_t \boldsymbol{J} + rot\boldsymbol{J}, \qquad (25)$$

где ρ – плотность заряда, $\boldsymbol{J}$ – 3-х мерный ток.

Согласно формуле (25), изменение тока $\nabla_t \boldsymbol{J}$ компенсируется ротором тока $rot\boldsymbol{J}$. Направление и вращение ротора определяется разницей $\boldsymbol{\nabla}\rho - \nabla_t \boldsymbol{J}$. Формула (25) – есть общая формулировка правила Ленца.

Наглядная иллюстрация (25) показана на Рис. 1.

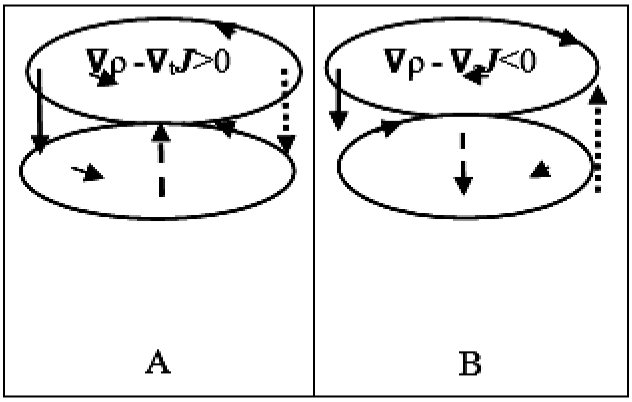

Рис. 1. Взаимная компенсация ротора (индукционного тока) и изменения тока по времени

А – случай $\boldsymbol{\nabla}\rho$ - $\boldsymbol{\nabla}_t\boldsymbol{J}$>0 и В –случай $\boldsymbol{\nabla}\rho$ - $\boldsymbol{\nabla}_t\boldsymbol{J}$<0, сплошная стрелка – направление градиента плотности заряда $\boldsymbol{\nabla}\rho$, пунктирная – направление изменения тока $\boldsymbol{\nabla}_t\boldsymbol{J}$, штриховая – направление ротора тока $rot\boldsymbol{J}$.

Рассмотрим оставшуюся часть (без $\nabla \wedge J = 0$) уравнения (18):

$$\nabla \wedge (\mu T \cdot A) = \nabla \wedge (\nabla \cdot F) \qquad (26)$$

Утверждение.

Равенство (26) дает уравнение Эйнштейна.

Действительно,

$$\nabla \wedge (\nabla \cdot F) = \nabla \wedge \big(\nabla \cdot (\nabla \wedge A) \big) = e^n \nabla_n (e^k \cdot (e^i \wedge e^j) \nabla_k \nabla_i A_j)$$

Применяя двойное cross-произведение Клиффорда

$$x \cdot (y \wedge z) = -(y \wedge z) \cdot x = (x \cdot y)z - (x \cdot z)y$$

к базисным векторам последнего уравнения, получим:

$$e^n \nabla_n \left(e^k \cdot (e^i \wedge e^j) \nabla_k \nabla_i A_j \right) = e^n \wedge e^j (\nabla_n (\Box A_j) - \nabla_n (\nabla_k \nabla_j A^k))$$

$\Box = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Даламбера.

Применяем замены (29) $\Box A_j = (\Lambda + \frac{1}{2}R)\delta_j^m A_m$

и $A^j_{;i;j} = A^j_{;j;i} - A^p R^j_{pij} = A^j_{;j;i} + A^p R_{pi}$.

Тогда уравнение (26) имеет вид:

$$e^n \wedge e^j \mathcal{D}_n (\mu T_{ji} A^i) = e^n \wedge e^j \nabla_n \left(\left(\Lambda + \frac{1}{2} R \right) \delta_j^m A_m \right) - e^n \wedge e^j \nabla_n (\nabla_j \nabla_i A^i + A^p R_{pj})$$

Так как $e^n \wedge e^j A^j_{;i;j;n} = 0$ (согласно (24)), то получим

$$\nabla_n (A^p R_{pj}) - \nabla_n \left(\left(\Lambda + \frac{1}{2} R \right) \delta_j^m A_m \right) + \nabla_n (\mu T_{ji} A^i) = 0$$

Упрощая это равенство, получим уравнение Эйнштейна.

$$R_{ij} - \left(\Lambda + \frac{1}{2} R \right) g_{ij} = -\mu T_{ji} \qquad (27)$$

3. Уравнения Эйнштейна.

Теперь получим уравнение Эйнштейна из единого уравнения электромагнетизма. Уравнение (7), кроме вида (8), можно записать в другой эквивалентной форме:

$$\nabla B = \Box A + (\nabla \wedge \nabla) \cdot A + \nabla \wedge \nabla \wedge A \qquad (28)$$

Заменим $\Box A$ на

$$\Box A = e^k g^{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j A_k = e^k (\Lambda + \tfrac{1}{2} R) \delta_k^m A_m \qquad (29)$$

Замена (29) означает, что рассматриваются собственные векторы оператора $\Box$. Тогда коэффициент (космологическая постоянная) Λ приобретает смысл собственных значений оператора $\Box$ при наличии гравитации, т.е. скалярная кривизна R является внешним источником.

Умножение R на 0.5 связано с тем, что для гиперповерхности скалярная кривизна в два раза больше гауссовой кривизны.

Вычислим $(\nabla \wedge \nabla) \cdot A$ в криволинейных координатах. Согласно двойному cross - произведению Клиффорда, получим:

$$(e^i \wedge e^j) \cdot e^k A_{k;j;i} = (g^{jk} e^i - g^{ik} e^j) A_{k;j;i} = e^k g^{ij} (A_{i;i;k} - A_{i;k;j}) \Rightarrow$$

$$(e^i \wedge e^j) \cdot e^k A_{k;j;i} = -e^k A_m R_k^m \qquad (30)$$

Учитывая (9), (13), (29), (30) из уравнения (28), получим в координатном виде:

$$e^k \mu T_k^m A_m = e^k \left(\Lambda + \frac{1}{2} R \right) \delta_k^m A_m - e^k A_m R_k^m$$

Замена $\nabla B = \mu T \cdot A$ означает, что обратный тензор энергии-импульса (T^{-1}) – есть поворот, который приводит вектор ∇∇A в μA в 4-х мерном пространстве.

Упрощая это равенство, получим уравнение Эйнштейна:

$$R_k^m - \left(\Lambda + \tfrac{1}{2} R \right) \delta_k^m = -\mu T_k^m \qquad (31)$$

Знак перед коэффициентами Λ и $\mu = \frac{8\pi G}{c^4}$ принципиального значения не имеет.

Мы получили уравнение Эйнштейна из неоднородного уравнения Максвелла, тем самым доказали их эквивалентность. Их эквивалентность также можно получить и из уравнения непрерывности [см.8].

Обсуждения и выводы

1. Однородная (9) и неоднородная (14) системы уравнений Максвелла являются частями единого уравнения (7).

2. Поле (пространство) может иметь «дыры» – $\nabla \cdot \mathrm{A} = divA\, I \neq \mathrm{const}$. Тогда 4-х ток является градиентом от дивергенции потенциала A (от «дыр»), а изменение по времени «стока» и/или «истока» в пространстве – есть положительный и/или отрицательный электрический заряд.

3. При больших энергиях уравнение Максвелла становится нелинейным. Из-за вклада энергии-импульса в 4-х ток (14) можно объяснить «бегучесть» физических констант (например, электрический заряд) и невозможность существования свободных кварков (конфайнмент).

4. Уравнение непрерывности (23) означает, что изменение энергии-импульса при деформации поля порождает изменение 4-х тока. При этом закон сохранения суммарного заряда не нарушается, так как общий заряд состоит из суммы положительных и отрицательных зарядов.

5. Согласно данной концепции, кроме сохранения дивергенции 4-х тока сохраняется и «4-х мерный» ротор 4-х вихревого тока (25). Правило Ленца приобретает обобщенную формулировку.

6. Уравнение Эйнштейна эквивалентно неоднородной системе Максвелла. Неоднородные уравнения Максвелла – есть уравнения для полевых величин (ток, тензор электромагнитного поля и потенциал), а уравнения Эйнштейна – есть уравнения для пространственных величин (метрический тензор, тензор кривизны, кривизны и тензор энергии-импульса).

В заключение должен отметить особую признательность жене, соратнице, Гомазковой Любови Николаевне, за помощь во всём – от корректировки текста до создания уюта для работы, а также Носиковой Марине Валерьевне за организацию публикации и поддержку. Также благодарен оппонентам, рецензентам за конструктивную критику и всем, кто сопутствовал появлению данного труда.

Список литературы / References

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля, том 2. Москва. ФИЗМАТЛИТ. С. 345-346.
2. *Chris J. L. Doran.* Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February, 1994. P. 4-6.
3. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1977. Т.1. С. 153-155.
4. Проблемы с углом Вайнберга в эксперименте NuTeV. Страница из проекта «Текущие открытия в физике элементарных частиц (ФЭЧ)».
5. *Anthony P.L.* et al. SLAC E158 Coll. "Precision measurement of the weak mixing angle in Moller scattering. E-print hep-ex/0504049.
6. *Бабаев А.Х.* Сохранение 4-х мерного тока в формализме, основанном на алгебре Клиффорда. SCI - ARTICLE. №41 (февраль) 2017. Приложение 1. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://sci-article.ru/stat.php?i=1485057429/ (дата обращения: 01.08.2017).
7. *Алфутов Н.А.* Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М. «Машиностроение», 1978. С. 39–77.
8. *Бабаев А.Х.* Эквивалентность неоднородной системы уравнений Максвелла и уравнений Эйнштейна. SCI - ARTICLE. №43 (март) 2017. Приложение 1. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://sci-article.ru/stat.php?i=1483104319/ (дата обращения: 01.08.2017).