РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Каракеев Т.Т.[1], Мустафаева Н.Т.[2] Email: Karakeev1138@scientifictext.ru

[1]Каракеев Таалайбек Тултемирович – доктор физико-математических наук, профессор;
[2]Мустафаева Нагима Таировна – аспирант,
кафедра информационных технологий и программирования,
Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына,
г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в работе изучаются вопросы регуляризации линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода с дифференцируемым ядром, которое вырождается в начальной точке диагонали. В предположении существования решения в пространстве непрерывных функций рассматриваемое уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра третьего рода, на основе которого получен регуляризирующий оператор. Доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода, получены оценка допускаемой погрешности и условия единственности решения исходного уравнения в шаре непрерывных функций.*

Ключевые слова: *уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.*

REGULARIZATION OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Karakeev T.T.[1], Mustafaeva N.T.[2]

[1]Karakeev Taalaibek Tultemirovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;
[2]Mustafaeva Nagima Tairovna - post-graduate Student,
INFORMATION TECHNOLOGIES AND PROGRAMMING DEPARTMENT,
KYRGYZ NATIONAL UNIVERSITY NAMED AFTER ZH. BALASAGYN,
BISHKEK, REPUBLIC OF KYRGYZSTAN

Abstract: *in this paper, we study the regularization of a linear Volterra integral equation of the first kind with a differentiable kernel that degenerates at the initial point of the diagonal. Under the assumption of the existence of a solution in the space of continuous functions, the equation under consideration reduces to the Volterra integral equation of the third kind, on the basis of which a regularizing operator is obtained. The uniform convergence of the regularized solution to the exact solution of the Volterra integral equation of the first kind is proved, an estimate of the admissible error and the uniqueness condition for the solution of the initial equation in the ball of continuous functions are obtained.*

Keywords: *Volterra equations, small parameter, uniform convergence.*

УДК 517.968

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = g(x), \qquad (1)$$

где для заданных функций $g(x)$ и $K(x,t)$ выполняются условия:

а) $K(x,t) \in C^{1,0}(D), D = \{(x,t)/\ 0 \le t \le x \le b\}, k(x) = K(x,x)|_{x=0} = 0,$
$0 < k(x)\ \forall x \in (0,b],\ k(x) -$ *неубывающая функция*;

б) $g(x) \in C^1\,[0,b], g^{(i)}(0) = 0, i = 0{,}1;\ G(x) \ge d_1 > 0,\ G(x) = L(x,x) +$
$+C_1 g(x), L(x,t) = C_2 K(x,t) + K_x(x,t), 0 < C_1, C_2, d_1 = const.$

В данной постановке изучается возможность регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра третьего рода. Регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода посвящены работы [2-4]. Обоснование регуляризируемости линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода проведены в [1, 5].

Действуя оператором $C_2 I + D + C_1 T$, где I – тождественный оператор, D – оператор дифференцирования по x, T - оператор Вольтерра вида

$$(Tv)(x) = \int_0^x u(t)v(t)dt,$$

из уравнения (1) получим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$k(x)u(x)+\int_0^x L(x,t)u(t)dt+C_1\int_0^x g(t)u(t)dt=$$

$$=C_1\int_0^x u(t)dt\int_0^t K(t,s)u(s)ds+f(x), \qquad (2)$$

где $f(x)=C_2 g(x)+g'(x)$.

Используя формулу Дирихле в уравнении (2) и прибавив в обе части (2) интеграл $\int_0^x L(t,t)u(t)dt$, привходим к уравнению

$$k(x)u(x)+\int_0^x G(t)u(t)dt=-\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]u(t)dt+$$

$$+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K(s,t)u(s)ds+f(x), \qquad (3)$$

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon+k(x)\big)u_\varepsilon(x)+\int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt=-\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]\,u_\varepsilon(t)dt\ +$$

$$+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x). \qquad (4)$$

Посредством резольвенты: $\frac{G(t)}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)$, ядра $\left(-\frac{G(t)}{\varepsilon+k(x)}\right)$ уравнения (4) приведем к следующему виду

$$u_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{-\int_0^t [L(t,s)-\right.$$

$$\left.-L(s,s)]u_\varepsilon(s)ds+C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_s^t K(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu+f(t)\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\left\{-\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]\,u_\varepsilon(t)dt+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\ \times\right.$$

$$\left.\times\int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x)\right\}.$$

Вносим эквивалентное изменение и перепишем это уравнение в виде

$$u_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\times$$

$$\times\left\{-\int_0^t [L(t,s)-L(s,s)]u_\varepsilon(s)ds+\int_0^x [L(x,s)-L(s,s)]u_\varepsilon(s)ds+f(t)-f(x)+\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_s^t K(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu-C_1\int_0^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\left\{-\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]\,u_\varepsilon(t)dt+\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x)\right\}.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим уравнение

$$u_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\times$$

$$\times\left\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)]\,u_\varepsilon(s)ds+\int_t^x [L(x,s)-L(s,s)]u_\varepsilon(s)ds-\right.$$

$$-C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_t^x K(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu-C_1\int_t^x u_\varepsilon(s)ds\times$$

$$\left.\times\int_s^x K(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu+f(t)-f(x)\right\}dt+\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\times$$

$$\times\,exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\left\{-\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]\,u_\varepsilon(t)dt+\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x)\right\}\equiv(Au_\varepsilon)(x). \qquad (5)$$

Введем обозначения

$\Omega[0,b]=\{\,u(x)\in C[0,b]\colon |u(x)-u_0|\le r_0, \qquad 0<u_0,\ r_0=const\}$;

Пусть $\bar u_\varepsilon(x),\ \ \tilde u_\varepsilon(x)\in\Omega[0,b]$. Оценим разность операторов $(A\bar u_\varepsilon)(x)-(A\tilde u_\varepsilon)(x)$. Тогда имеем

$$|(A\bar u_\varepsilon)(x)-(A\tilde u_\varepsilon)(x)|\le\left|\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\times\right.$$

$$\times\left\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)](\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds+\int_t^x (L(x,s)-L(s,s))\times\right.$$

$$\times\left(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)\right)ds-C_1\left[\int_0^t(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds\int_t^x K(\nu,s)\,\bar u_\varepsilon(\nu)d\nu+\right.$$

$$+\int_0^t\tilde u_\varepsilon(s)ds\int_t^x K(\nu,s)\,(\bar u_\varepsilon(\nu)-\tilde u_\varepsilon(\nu))d\nu+\int_t^x(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds\times$$

$$\left.\left.\left.\times\int_s^x K(\nu,s)\,\bar u_\varepsilon(\nu)d\nu+\int_t^x\tilde u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K(\nu,s)\,(\bar u_\varepsilon(\nu)-\tilde u_\varepsilon(\nu))d\nu\right]\right\}dt\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\left\{-\int_0^x(L(x,t)-L(t,t))\,(\bar u_\varepsilon(t)-\tilde u_\varepsilon(t))dt+\right.\right.$$

$$+\,C_1\int_0^x(\bar u_\varepsilon(t)-\tilde u_\varepsilon(t))dt\int_t^x K(s,t)\,\bar u_\varepsilon(s)ds+$$

$$\left.\left.+C_1\int_0^x\tilde u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds\right\}\right|. \qquad (6)$$

Произведем оценки:

1) $$\left|\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times[\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)]ds+\int_t^x(L(x,s)-L(s,s))[\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)]ds\right\}dt\right|\le\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\times$$

$$\times\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}2(C_2L_1+L_2)(x-t)dt\times$$

$$\times\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}\,ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\left(\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\,dt\le$$

$$\leq \frac{2(C_2L_1+L_2)}{d_1}\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt,$$

где $L_1 = \max_D |K(x,t)|$, $0 < L_2 -$ коэффициент Липшица функции $K_x(x,t)$ по аргументу x;

$$2)\ \left|\frac{C_1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{\int_0^t [\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_t^x K(\nu,s)\,\bar{u}_\varepsilon(\nu)d\nu + \int_t^x [\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\int_s^x K(\nu,s)\,\bar{u}_\varepsilon(\nu)d\nu\right\}dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{2C_1\,Mr}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{d_1}ds\,dt \times$$

$$\times\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt \leq 2C_1\,Mr{d_1}^{-1}\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt,\ \ M = \max_D |K(x,t)|;$$

$$3)\ \left|\frac{C_1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{\int_0^t \tilde{u}_\varepsilon(s)ds\int_t^x K(\nu,s)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times[\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)]d\nu + \int_t^x \tilde{u}_\varepsilon(s)ds\int_s^x K(\nu,s)\,[\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)]d\nu\right\}dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{2C_1bMr}{\varepsilon+k(x)}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\times$$

$$\times\int_t^x \frac{G(s)}{d_1}ds\,dt \leq 2C_1bMrd_1^{-1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$

где $\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} = \max_{x\in[0,b]}|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)|$;

$$4)\ \left|\frac{1}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\int_0^x (L(x,t)-L(s,s))\,[\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)]dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{C_2L_1+L_2}{\varepsilon+k(x)}\ \ exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\int_0^x (x-t)\,|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt \leq$$

$$\leq \frac{C_2L_1+L_2}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x G(s)ds\right)\int_0^x \frac{G(s)}{d_1}ds\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|\,dt \leq$$

$$\leq (C_2L_1+L_2)(d_1e)^{-1}\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt;$$

$$5)\ \left|\frac{C_1}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}dt\right)\left\{\int_0^x [\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)]dt\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_t^x K(s,t)\,\bar{u}_\varepsilon(s)ds + \int_0^x \tilde{u}_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\right\}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2C_1Mr}{d_1e}\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt.$$

В результате произведенных оценок 1) -5), из (6) получим следующее неравенство

$$|(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)| \leq$$
$$\leq 2C_1bMrd_1^{-1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} +$$
$$+[(C_2L_1+L_2)(2+e^{-1})+2C_1Mr(1+e^{-1})]{d_1}^{-1}\int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt. \quad (7)$$

Переходя к норме в обеих частях неравенства (7), имеем

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)\|_{C[0,b]} \le q_1 \ \|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}, \quad (8)$$

где $q_1 = b[L_2 + C_2L_1 + 2C_1Mr](2+e^{-1}){d_1}^{-1}$.

Если имеют место условия $q_1 < 1$ и

$$|(Au_0)(x)-u_0| \le (1-q)r, \quad (9)$$

то уравнение (4) имеет единственное решение [7, с. 392], в $\Omega[0,b]$.

Теорема. Пусть выполняются условия *а*), *б*), $q_1 < 1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x) \in C[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (4) равномерно сходится к решению уравнения (1), причем имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{C[0,b]} \le (1-q_1)^{-1}\left(4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta} |u(x)-u(t)|, \quad 0<\beta<1$

Доказательство. С помощью подстановки

$$\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x) \quad (10)$$

из (3) и (4) получим

$$\left(\varepsilon + k(x)\right)\eta_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\,\eta_\varepsilon(t)dt = -\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]\,\eta_\varepsilon(t)dt \ +$$

$$+C_1\int_0^x \eta_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,u(s)ds + C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K(s,t)\,\eta_\varepsilon(s)ds +$$

$$+\varepsilon[u(0)-u(x)].$$

Это уравнение, используя резольвенту $R(x,t,\varepsilon) = \frac{G(t)}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)$ ядра $\left(-\frac{G(t)}{\varepsilon+k(x)}\right)$, преобразуем к следующему виду

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{\int_0^t [L(\ x,s) -\right.$$

$$-L(t,s)]\eta_\varepsilon(s)ds + \int_t^x [L(x,s)-L(s,s)]\eta_\varepsilon(s)ds -$$

$$-C_1\int_0^t \eta_\varepsilon(s)ds\int_t^x K(v,s)\,u_\varepsilon(v)dv - C_1\int_t^x \eta_\varepsilon(s)ds\int_s^x K(v,s)\,u_\varepsilon(v)dv$$

$$-C_1\int_0^t u(s)ds\int_t^x K(v,s)\,\eta_\varepsilon(v)dv - C_1\int_t^x u(s)ds\int_s^x K(v,s)\,\eta_\varepsilon(v)dv +$$

$$\left.+\varepsilon[u(x)-u(t)]\right\}dt + \frac{1}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\times$$

$$\times\left\{-\int_0^x [L(x,t)-L(t,t)]\,\eta_\varepsilon(t)dt + C_1\int_0^x \eta_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds +\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K(s,t)\,\eta_\varepsilon(s)ds - \varepsilon[u(x)-u(0)]\right\}. \quad (11)$$

Используя (7) из (11) получим следующую оценку

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \le q_1\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]},$$

$$(H_\varepsilon u)(x) \equiv -\frac{\varepsilon}{\varepsilon+k(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)[u(x)-u(0)] +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+k(t)}[u(x)-u(t)]\,dt. \quad (12)$$

При выполнении условий *а) - в)* и $u(x) \in C[0,b]$ для $(H_\varepsilon u)(x)$ имеет место оценка [1]

$$\|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]} \le 4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right), \quad (13)$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta} |u(x)-u(t)|, \quad 0<\beta<1.$

Тогда

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \leq (1-q_1)^{-1}\left(4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\right).$$

Следовательно, учитывая (10), при $\varepsilon \to 0$ функция $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ равномерно. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы решение уравнения (1) единственно в $\Omega[0, b]$.

Список литературы / References

1. *Асанов А., Ободоева Г.* Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. Фрунзе: Илим, 1994. Вып. 25. С. 65–74.
2. *Денисов А.М.* О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода // ЖВМ и МФ, 1975. Т. 15. № 4. С. 1053–1056.
3. *Иманалиев М.И., Асанов А*. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. Фрунзе: Илим, 1988. Вып.21. С. 3–38.
4. *Лаврентьев М.М*. Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР, 1959. Т. 127. № 1. С. 31-33.
5. *Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.* Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2014. Выпуск 5. С. 19-22.
6. *Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т.* Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. Бишкек: Илим, 2006. 164 с.
7. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 496 с.