МЕТОД ОЦЕНКИ КОРНЕЙ ЧАСТНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Довгополая Е.А. Email: Dovgopolaya1141@scientifictext.ru

Довгополая Елена Алексеевна – аспирант,
кафедра электронных измерительных систем,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

Аннотация: *в работе предложен метод оценки корней нелинейных алгебраических уравнений с положительными коэффициентами для случая существенно различных по модулю корней, среди которых имеется, по крайней мере, одна пара комплексно-сопряженных. Метод базируется на использовании понятий частоты и добротности корней. Полученные результаты могут найти широкое применение при анализе и оптимизации систем автоматического регулирования, широкополосных и импульсных усилителей, активных фильтров, механических резонансных систем и т.п.*

Ключевые слова: *нелинейное алгебраическое уравнение, характеристическое уравнение, частота, добротность, решение гладких нелинейных задач, приближенные формулы, комплексно-сопряженные корни.*

A METHOD OF EVALUATING THE ROOTS OF THE PRIVATE CLASS OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH POSITIVE COEFFICIENTS

Dovgopolaya E.A.

Dovgopolaya Elena Alekseevna - PhD Student,
ELECTRONIC MEASUREMENT SYSTEMS DEPARTMENT,
NATIONAL RESEARCH NUCLEAR UNIVERSITY «MEPHI»,
MOSKOW

Abstract: *this paper presents the proposed method of assessing the roots of nonlinear algebraic equations with positive coefficients for the case of a significantly different module roots, among which there is at least one pair of complex-conjugate. The method is based on the use of the concepts of frequency and Q-factor of the roots. The obtained results could be widely adopted in the analysis and optimization of automatic control systems, wideband and pulse amplifiers, active filters, mechanical resonance systems, etc.*

Keywords: *nonlinear algebraic equation, characteristic equation, frequency, Q-factor, smooth nonlinear problem solving, approximate formulas, complex conjugate roots.*

УДК 51-74; 62-52

Введение. При анализе многих технических систем получаются нелинейные алгебраические уравнения высоких порядков. Известные точные формулы определения корней уравнений четвертого порядка, получаемые с помощью использования сложных формул Кардано для решения кубических уравнений, оказываются еще более сложными, что не позволяет с их помощью оптимизировать и проектировать технические системы.

Известно, что при моделировании технических систем крайне редок и не представляет исследовательского интереса случай, когда все корни уравнения являются действительными [1, 2]. При рассмотрении характеристических уравнений систем автоматического регулирования, очевиден вывод о наличии у них доминирующего низкочастотного полюса, т.е. действительного корня с наименьшей частотой [3]. Говоря об описании активных фильтров, соответствующие нелинейные алгебраические уравнения в числе своих корней имеют с необходимостью доминирующие низкочастотные комплексно-сопряженные корни с добротностью, равной нескольким единицам [4].

В целом, описание технических систем различной природы с неизбежностью приводит после преобразований Лапласа к нелинейным алгебраическим уравнениям, корни которых в силу физики процессов разнесены между собой по модулю. Таким образом, среди характерных для описания технических систем и физических объектов преобладают нелинейные уравнения с существенно различными по модулю корнями, среди которых имеется, по крайней мере, одна пара комплексно-сопряженных.

В [5] предложен способ приближенного определения корней кубических уравнений с положительными коэффициентами и комплексно-сопряженными корнями с использованием понятий частоты и добротности, которые выражаются простыми приближенными, но достаточно точными формулами. При определенных условиях приведенные в [5] формулы можно использовать и для нахождения добротностей комплексно-сопряженных корней уравнений четвертой степени.

Любое уравнение четвертой степени можно представить в виде:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (1)$$

Для удобства сразу введем ряд параметров, сравнение которых с единицей укажет на рекомендуемую к использованию приближенную формулу оценки добротности:

$$X = \frac{a^2 d}{c^2}, \qquad (2)$$

$$Y = \frac{a^3 c}{b^3}, \qquad (3)$$

$$Z = \frac{b^3 d}{ac^3}. \qquad (4)$$

Пусть уравнение имеет два комплексных корня с нормированной частотой $\omega_0 = 1$ и добротностью q_0. При этом квадратное уравнение, которое обладает такими корнями, имеет вид [6]:

$$x^2 + \frac{1}{q_0}x + 1 = 0. \qquad (5)$$

Два других корня вне зависимости от того, действительные они или комплексно-сопряженные, можно получить из другого квадратного уравнения [6, 7]:

$$x^2 + \frac{\omega_1}{q_1}x + \omega_1^2 = 0, \qquad (6)$$

где ω_1 – частота корней, а q_1 – их добротность. Если корни комплексно-сопряженные, то $q_1 > 0{,}5$. Если они действительные с частотами (модулями их значений), равными a и b, то $\omega_1^2 = ab,\ \dfrac{\omega_1}{q_1} = a + b.$ При этом $\omega_1 = \sqrt{ab},$ а $q_1 = \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

Перемножив левые части уравнений (5) и (6) и приравняв к нулю правую часть, получим уравнение четвертой степени:

$$x^4 + \left(\frac{1}{q_0} + \frac{\omega_1}{q_1}\right)x^3 + \left(1 + \omega_1^2 + \frac{\omega_1}{q_0 q_1}\right)x^2 + \left(\frac{\omega_1}{q_1} + \frac{\omega_1^2}{q_0}\right)x + \omega_1^2 = 0. \qquad (7)$$

Умножив каждый член уравнения (7) на $q_0 q_1$, получим:

$$q_0 q_1 x^4 + \left(q_1 + \omega_1 q_0\right)x^3 + \left(q_0 q_1 + \omega_1 + \omega_1^2 q_0 q_1\right)x^2 + \omega_1\left(q_0 + \omega_1 q_1\right)x + \omega_1^2 q_0 q_1 = 0. \qquad (8)$$

Параметр X для уравнения (8): $X = \dfrac{(q_1 + \omega_1 q_0)^2 \omega_1^2 q_0 q_1}{(\omega_1^2 q_1 + \omega_1 q_0)^2 q_0 q_1} = \dfrac{(q_1 + \omega_1 q_0)^2}{(\omega_1 q_1 + q_0)^2}$. Положим теперь, что $X >> 1$, тогда $q_1^2 + 2\omega_1 q_0 q_1 + \omega_1^2 q_0^2 >> q_0^2 + 2\omega_1 q_0 q_1 + \omega_1^2 q_1^2$ или, что тоже самое, $\omega_1^2 >> 1$ (легко получить после произведения очевидных сокращений и переноса членов при ω_1 в левую часть неравенства). Аналогично, при $X << 1$ $\omega_1^2 << 1$.

Предположим, что выполняются условия:

$$\omega_1^2 >> 1,\ \omega_1 q_0 >> 1,\ \omega_1 q_0 >> q_1,\ \omega_1 q_0 q_1 >> 1. \qquad (9)$$

В этом случае уравнение (8) принимает следующий вид:

$$q_0 x^3 + \omega_1 q_0 q_1 x^2 + \left(q_0 + \omega_1 q_1\right)x + \omega_1 q_0 q_1 = 0. \qquad (10)$$

Для нахождения приближенного значения добротности q_{01} воспользуемся формулой, приведенной в [5]:

$$q_{01} = \frac{b\sqrt{bd}}{bc - ad}. \qquad (11)$$

Нетрудно убедиться в том, что приближенное значение добротности, вычисленное по формуле (11), равно ее точному значению, т.е. $q_{01} = q_0$. Таким образом, при выполнении условий (9) формула (11) обеспечивает определение добротности с достаточной точностью для проведения оценочных расчетов.

Выполнение условий (9) на практике возможно лишь при достаточно больших значениях ω_1. В [5] показано, что для кубического уравнения при выполнении условия $Z >> 1$ частота действительного корня ω_1 много больше частоты комплексно-сопряженных корней ω_0, т.е. $\omega_1 >> \omega_0$. Тот же параметр Z можно использовать и при анализе уравнения четвертой степени (1).

В случае если $Z << 1$, в уравнении четвертой степени (1) можно пренебречь коэффициентом d, т.е. $d = 0$, и, разделив все члены уравнения на x, получить кубическое уравнение. Проделав это преобразование с уравнением (8), получим:

$$q_0 q_1 x^3 + \left(q_1 + \omega_1 q_0\right) x^2 + \left(q_0 q_1 + \omega_1 + \omega_1^2 q_0 q_1\right) x + \omega_1 \left(q_0 + \omega_1 q_1\right) = 0. \qquad (12)$$

Полагая, что выполняются условия

$$\omega_1^2 << 1, \ \omega_1 << q_0 q_1, \ \omega_1 q_1 << q_0, \qquad (13)$$

получаем уравнение

$$q_0 q_1 x^3 + \left(q_1 + \omega_1 q_0\right) x^2 + q_0 q_1 x + \omega_1 q_1 = 0. \qquad (14)$$

Для нахождения добротности комплексных полюсов q_0 воспользуемся приближенной формулой, предложенной в [5]:

$$q_{02} = \frac{c\sqrt{ac}}{bc - ad}, \qquad (15)$$

где $a = q_0 q_1$, $b = q_1 + \omega_1 q_0$, $c = q_0 q_1$, $d = \omega_1 q_1$.

Нетрудно убедиться, что при стремлении $Z \to 0$ добротность q_{02}, определенная по приближенной формуле (15), равна точному значению добротности q_0.

Проводя аналогичные выкладки приведенным выше, нетрудно убедиться, что при выполнении условия $\omega_1^2 << 1$ (что соответствует $X << 1$, как было показано) в уравнении (8) можно пренебречь свободным членом. Тогда выполнение условия $Y >> 1$ влечет за собой возможность определения добротности по формуле

$$q_{03} = \frac{a\sqrt{ac}}{ab - c}. \qquad (16)$$

В случае, когда $Y << 1$ хорошие результаты показывает следующая формула:

$$q_{04} = \frac{b\sqrt{b}}{ab - c}. \qquad (17)$$

Аналогичным образом, несложно определить частоты соответствующих корней с использованием формул из [5].

Логичным продолжением рассматриваемого метода оценки характеристик корней нелинейных алгебраических уравнений 4 степени, удовлетворяющих условиям Рауса-Гурвица, является его обобщение, которое производится следующим образом: исходное уравнение степени *n* разбивается последовательно на многочлены третьей степени (см. рис. 1).

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \boxed{a_{n-3}x^{n-3}} + a_{n-4}x^{n-4} + \ldots + a_4x^4 + \boxed{a_3x^3} + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Рис. 1. Схема выделения кубических многочленов из уравнения степени n

Далее оцениваются корни выделенных многочленов по алгоритму, изложенному выше и приведенному в [5]. Таким образом будут найдены все необходимые n характеристик корней исходного уравнения.

Работа выполнена при поддержке гранта ФГБУ «Фонд содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере» по договору (соглашению) № 11296ГУ/2016 от 07.04.2017 г.

Выводы.

1. Разработан метод оценки характеристик корней нелинейных алгебраических уравнений 4 степени, удовлетворяющих условиям Рауса-Гурвица.
2. Предложен способ обобщения для оценки корней частного класса нелинейных алгебраических уравнений с положительными коэффициентами.
3. Обсуждавшийся в статье приближенный подход к определению добротности в различных технических системах может найти широкое применение в целях анализа и оптимизации систем автоматического регулирования, широкополосных и импульсных усилителей, активных фильтров, механических резонансных систем и т.п.

Список литературы / References

1. *Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Имитационное моделирование сложных динамических систем // [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www. exponenta. ru/soft/others/mvs/ds_sim. asp)/ (дата обращения 20.04. 2012), 2009.
2. *Колесов Ю.Б.* Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. БХВ-Петербург, 2006.
3. *Масленников В.В., Мещеряков В.В., Довгополая Е.А.* Метод анализа САР, описываемых математической моделью с кубическим характеристическим уравнением. Автоматика и телемеханика, 2016. № 12. С. 150–158.
4. Активные избирательные устройства радиоаппаратуры. Под редакцией В.В. Масленникова. М.: Радио и связь, 1987. 216 с.: ил.
5. *Масленников В.В*. Метод приближенного определения корней кубического уравнения с положительными коэффициентами и комплексно-сопряженными корнями. Вестник НИЯУ МИФИ. 2015, №2.
6. *Мошиц Г., Хорн П*. Проектирование активных фильтров: Пер. с англ. / Под ред. И.Н. Теплюка. М.: Мир, 1984. 320 с.
7. *Масленников В.В., Сироткин А.П.* Избирательные RC-усилители. М.: Энергия, 1980. 216 с.: ил.