ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИНТЕГРАЛЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Тарасова С.С.[1], Тарасов В.Е.[2] Email: Tarasova1143@scientifictext.ru

[1]Тарасова Светлана Семеновна - кандидат технических наук, доцент,
кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования,
Московский авиационный институт
Национальный исследовательский университет;
[2]Тарасов Василий Евгеньевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва

Аннотация: *в статье кратко описывается интегрирование нецелого порядка и распределенного порядка. Рассматривается пример интеграла распределенного порядка, когда распределение порядка интегрирования является непрерывным равномерным распределением. Показывается, что этот интеграл выражается через интеграл континуального порядка, предложенный А.М. Нахушевым. Показывается необходимость дальнейшего изучения интегралов распределенного порядка методами теории вероятностей, и описания свойств этих интегралов для непрерывных распределений положительной случайной величины, в качестве которой выступает порядок интегрирования.*
Ключевые слова: *теория вероятностей, дробный интеграл, интеграл нецелого порядка, интеграл распределенного порядка, непрерывное равномерное распределение.*

PROBABILITY THEORY AND INTEGRALS OF DISTRIBUTED ORDER

Tarasova S.S.[1], Tarasov V.E.[2]

[1]Tarasova Svetlana Semenovna - PhD in Technical Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF THEORY OF PROBABILITY AND COMPUTER MODELING,
MOSCOW AVIATION INSTITUTE
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY;
[2]Tarasov Vasily Evgen'evich – Leading Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
SKOBELTSYN INSTITUTE OF NUCLEAR PHYSICS
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
MOSCOW

Abstract: *in the paper we describe the integration of non-integer order and distributed order. An example of distributed-order integral is considered, when the distribution of the order is continuous uniform distribution. It is shown that this integral is expressed in terms of the integral of continuum order proposed by A.M. Nakhushev. The necessity of further study of the distributed-order integrals by the methods of probability theory and the description of the properties of these integrals for continuous distributions of positive random variable, which is the order of integration, is shown.*
Keywords: *probability theory, fractional integral, integral of non-integer order, integral of distributed order, continuous uniform distribution.*

УДК 519.2

В современной математике, помимо производных и интегралов целого порядка, известны интегралы нецелого порядка. Например, n-кратным интегралом называется выражение

$$(I_a^n f)(x) := \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} dx_n f(x_n)\,, \qquad (1)$$

где n - положительное целое число. Известна формула для n-кратного интегрирования [1, с. 41], позволяющая записать интеграл (1) в виде

$$(I_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \qquad (2)$$

Используя гамма-функцию $(n-1)! = \Gamma(n)$, формула (2) может быть аналитически продолжена на нецелые значение n:

$$(I_a^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \qquad (3)$$

где $a < x < b$. Выражение (3) называется дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, [1, с. 42]. Функция $f(x)$ предполагается измеримой на интервале (a, b) и удовлетворяющей условию $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$. Интеграл Римана-Лиувилля (3) для порядка $\alpha = 1$ совпадает со стандартным интегралом

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau. \qquad (4)$$

Отметим, что для положительных целых значений $\alpha = n$ интеграл Римана-Лиувилля совпадает с n-кратным интегралом (2).

В общем случае параметр α может быть распределен на интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$, где распределение описывается весовой функцией ρ(α). При этом предполагается, что функция ρ(α) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(\alpha) d\,\alpha = 1. \qquad (5)$$

Функция ρ(α) описывает некоторое распределение параметра порядка на положительной полуоси.

Отметим, что концепция интегрирование и дифференцирования распределенного порядка была предложена М. Капуто в 1995 году [2], и затем развита в работах других авторов (например, см. [3, 4, 5, 6, 7]).

Используя дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, мы можем определить дробный интеграл распределенного порядка в виде

$$\left(I_{a;\rho(\alpha)}^{[\alpha_1,\alpha_2]} f\right)(x) := \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(\alpha) \cdot (I_a^{\alpha} f)(x) d\,\alpha, \qquad (6)$$

где ρ(α) удовлетворяет условию нормировки (5) и $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. В уравнении (6) интегрирование по x и α можно переставить для широкого класса функций f(x). В результате уравнение (6) можно записать в виде

$$\left(I_{a;\rho(\alpha)}^{[\alpha_1,\alpha_2]} f\right)(x) = \int_a^x M_{\rho(\alpha)}^{[\alpha_1,\alpha_2]}(x-\tau) \cdot f(\tau) d\tau, \qquad (7)$$

где ядро $M_{\rho(\alpha)}^{[\alpha_1,\alpha_2]}(x-\tau)$ определяется формулой

$$M_{\rho(\alpha)}^{[\alpha_1,\alpha_2]}(x-\tau) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot (x-\tau)^{\alpha-1} d\,\alpha. \qquad (8)$$

Использование условия нормировки для весовой функции ρ(α) позволяет интерпретировать ее как плотность вероятности для случайной величины α>0. Это открывает возможности для применения методов теории вероятностей для описания интегралов распределенного порядка, рассматривая различные распределения. Простейшим распределением является непрерывное равномерное распределение. Для рассмотрения такого распределения, мы можем определить весовую функцию в виде

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \\ 0 & \alpha \notin [\alpha_1, \alpha_2] \end{cases} \qquad (9)$$

где $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. В этом случае ядро (8) интешрала (7) принимает вид

$$M_{CUD}^{[\alpha_1,\alpha_2]}(x) = W(\alpha_1, \alpha_2, x), \qquad (10)$$

где мы использовали функцию

$$W(\alpha, \beta, x) := \frac{1}{(\beta-\alpha)\cdot x} \cdot Vi(\alpha, \beta, x) = \frac{1}{(\beta-\alpha)\cdot x} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^{\xi} d\xi}{\Gamma(\xi)}. \qquad (11)$$

В результате получаем дробный интеграл равномерно распределенного порядка в виде

$$\left(I_{a;UDO}^{[\alpha,\beta]} f\right)(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left(I_{a+}^{\xi} f\right)(x)\, d\xi = \int_a^x W(\alpha, \beta, x-\tau) \cdot X(\tau) d\tau, \qquad (12)$$

где $\beta > \alpha > 0$. Аналогично можно определить производные равномерно распределенного порядка.

Отметим, что полученный интеграл равномерно распределенного порядка может быть выражен через интеграл континуального порядка, предложенный А.М. Нахушевым в 1998 году [8]. Отличие интеграла равномерно распределенного порядка от интеграла континуального порядка состоит только в числовом множителе $1/(\beta - \alpha)$. Свойства интегралов континуального порядка и обратных операторов описаны в работах А.Н. Нахушева [8, 9] и А. В. Псху [10, 11]. В результате, используя эти свойства можно описать свойства дробного интеграла равномерно распределенного порядка.

Представляет интерес рассмотрение дробного интегрирования распределенного порядка для распределений порядка интегрирования как случайной величины. Основной интерес представляют непрерывные распределения для положительной случайной величины [12, 13, 14]. Перечислим некоторые из таких распределений.

Экспоненциальное распределение с функцией плотности

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot \alpha) & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Это непрерывное распределение моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

Бета-распределение с функцией плотности вида

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{B(a,b)} \cdot \alpha^{a-1} \cdot (1-\alpha)^{b-1}, \qquad (14)$$

где a>0 и b>0 – коэффициенты формы, $B(a,b) = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ – бета-функция Эйлера. Бета-распределение используется для описания случайных величин, значения которых ограничены конечным интервалом $\alpha \in [0,1]$ или $\alpha \in (0,1)$.

Распределение Вейбулла, плотность которого имеет вид

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^k\right) & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

где λ – коэффициент масштаба, k – коэффициент формы.

Логнормальное распределение с плотностью

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{\alpha\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln \alpha - \mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right), \qquad (16)$$

где σ>0, $\mu \in (-\infty, \infty)$ и $\alpha > 0$.

Гамма-распределение, которое задается плотностью

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-1}}{\theta^k \cdot \Gamma(k)} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\theta}\right) & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \qquad (17)$$

где θ – коэффициент масштаба, k – коэффициент формы. Если k целое число, то распределение (17) также называется распределением Эрланга.

Распределения Парето с функцией плотности вероятности

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \frac{k\cdot\alpha_m^k}{\alpha^{k-1}} & \alpha \geq \alpha_m \\ 0 & \alpha < \alpha_m \end{cases} \qquad (18)$$

где $\alpha_m > 0$ – коэффициент масштаба, k>0 – коэффициент формы, $\alpha \geq \alpha_m$. Вне экономической теории распределение Парето также называется распределением Брэдфорда.

Распределение Рэлея с функцией плотности

$$\rho(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\cdot\sigma^2} \cdot \alpha^2\right), \qquad (19)$$

где σ>0 – параметр масштаба, $\alpha \geq 0$.

Распределение Накагами с функцией плотности вероятности

$$\rho(\alpha) = \frac{2\cdot m^m}{\Gamma(m)\cdot\Omega^m} \alpha^{2m-1} \cdot \exp\left(-\frac{m}{\Omega} \cdot \alpha^2\right), \qquad (20)$$

где $m \geq 0.5$, Ω>0 и $\alpha > 0$.

Усеченные нормальные распределения с односторонним усечением слева в точке 0 и с двусторонним усечением.

Подстановка функций (13)-(20), описывающих плотности вероятностей распределений, в выражение (8) задает дробные интегралы (7) с соответствующим распределением случайной величины – порядка интегрирования.

Использование методов теории вероятностей позволит построить последовательную теорию интегралов и производных распределенного порядка для различных распределений случайной величины α.

К настоящему моменту, в научной литературе изучение свойств интегралов и производных распределенного порядка методами теории вероятностей не производилось. Статей, в которых бы изучались свойства интегралов и производных для различных видов распределений, пока нет. Работы по теории интегралов и производных распределенного порядка посвящены главным образом вопросам применения этого математического аппарата. Математически последовательные и строгие рассмотрения различных видов распределений порядка интегрирования с позиций теории вероятностей до сих пор не производились. Эта направление математической науки ждет теоретико-вероятностных исследований. Отметим, что изучение дробных интегралов и производных распределенного порядка имеет важное прикладное значение для описания различных процессов в физике, экономике, и технических науках. Сейчас в этой области необходимы математические результаты, основанные на применении методов теории вероятностей.

Список литературы / References

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Марычев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. 688 с.
2. *Caputo M.* Mean fractional-order-derivatives differential equations and filters // Annali dell'Universita di Ferrara, 1995. Vol. 41. № 1. P. 73-84. DOI: 10.1007/BF02826009
3. *Bagley R.L., Torvik P.J.* On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations. Part I // International Journal of Applied Mathematics, 2000. Vol. 2. P. 865-882.
4. *Bagley R.L., Torvik P.J.* On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations. Part II // International Journal of Applied Mathematics, 2000. Vol. 2. P. 965-987.
5. *Lorenzo C.F., Hartley T.T.* Variable order and distributed order fractional operators // Nonlinear Dynamics, 2002. Vol. 29. № 1. P. 57-98. DOI: 10.1023/A:1016586905654.
6. *Jiao Z., Chen Y.Q., Podlubny I.* Distributed-Order Dynamic Systems: Stability, Simulation, Applications and Perspectives. London: Springer, 2012. 90 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-2852-6.
7. *Gorenflo G., Luchko Yu., Stojanovic M.* Fundamental solution of a distributed order time-fractional diffusion-wave equation as probability density // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. Vol. 16. P. 297-316. DOI: 10.2478/s13540-013-0019-6.

8. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения, 1998. Том 34. № 1. С. 101-109.
9. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
10. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференциальные уравнения, 2004. Том 40. № 1. С. 120-127.
11. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
12. *Тарасова С.С.* Теория вероятностей в задачах авиационной техники. Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 1984. 70 с.
13. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с. ISBN: 5-02-024919X.
14. *Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B.* Statistical Distributions, Fourth Edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2011. 212 p. ISBN 978-0-470-39063-4.