КВАДРАТИЧНЫЕ И СВОДИМЫЕ К НИМ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Григорян К.М. Email: Grigoryan1144@scientifictext.ru

Григорян Карине Микитовна - преподаватель,
кафедра информационных технологий и естественных наук,
Шушинский технологический университет, г. Шуши, Республика Армения

Аннотация: *в статье приведены типы задач с параметрами, рассмотрены решения некоторых квадратичных и сводимых к ним уравнений с параметрами графическим и аналитическим методами. Так как не существует единого алгоритма решения таких уравнений, рассмотрены уравнения с заданным условием в области определения для множества решений и уравнения с решением при всех допустимых значениях параметра. Использован графический метод с построением графиков соответствующих квадратичных функций и аналитический с применением теоремы Виета и других способов тождественных преобразований.*
Ключевые слова: *квадратичное уравнение, параметр, функция, график, неравенство, решение.*

QUADRATIC AND REDUCIBLE TO THEM EQUATIONS WITH PARAMETERS

Grigoryan K.M.

Grigoryan Karine Mikitovna – Teacher,
DEPARTMENT OF INFORMATION TECHNOLOGY AND NATURAL SCIENCES,
SHUSHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, SHUSHI, REPUBLIC OF ARMENIA

Abstract: *the article describes the types of tasks with parameters,the solution of certain quadratic and reducible to them equations with graphical and analytical methods.Since there is no single algorithm for solving these equations are considered the equations with a given condition to determine many solutions, and equations with a solution for all admissible parameter values.Used the graphical method with the graph of the corresponding quadratic functions and analytical application of the theorem of Vieta and other ways identical transformations.*
Keywords: *quadratic equation, parameter, function, graph, inequality, solution.*

УДК 378.14

В уравнениях с параметрами $F(x, a) = 0$ при каждом фиксированном значении параметра получается уравнение с одной переменной x. Множеством решений таких уравнений является множество пар чисел x, a, при подстановке которых в исходное уравнение получается верное равенство. Аргументы x *и* a неравноправны, так как при решении таких задач требуется найти x, выраженное через a, выяснить зависимость решений от значений параметра a.

Задачи с параметрами по типу можно разделить на 4 больших класса.

1. Уравнения, неравенства и их системы, которые необходимо решить для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих определенному множеству;
2. Уравнения, неравенства и их системы, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значений параметра;
3. Уравнения, неравенства и их системы, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства и их системы имеют заданное число решений;
4. Уравнения, неравенства и их системы, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданному условию в области определения.

Для решения задач с параметрами не существует какого-либо алгоритма, используются графический, аналитический, функциональный, геометрический, аналитико-графический методы.

При решении квадратичных и сводимых к ним уравнений с параметрами применяются формулы для корней квадратного уравнения, условие существования действительных корней и теорема Виета.

Приведем примеры решения некоторых различных задач с параметрами 1-го и 4-го типов из [1], предложенных для самостоятельного решения.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a+1) = 0$ имеет два корня, один из которых больше a, а другой – меньше a.

Решение. Обозначим $f(x) = 2x^2 - 2(2a+1)x + a(a+1)$ и схематично изобразим в системе координат график функции $f(x)$. Это будет парабола, ветви которой направлены вверх. Из условия $f(a) < 0$ следует, что искомое уравнение имеет два корня, один из которых больше a, а другой - меньше a (рис. 1).

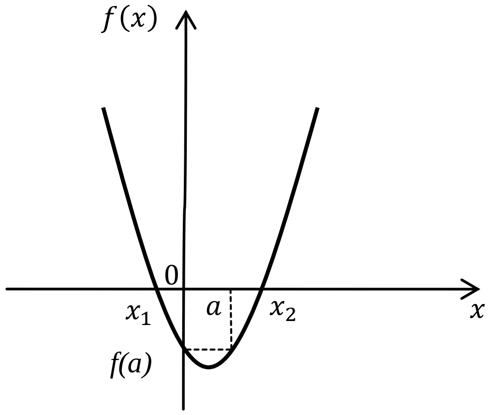

Рис. 1

Для нахождения нужных значений параметра a решим неравенство

$f(a) < 0, \quad 2a^2 - 2(2a+1)a + a(a+1) < 0 \Leftrightarrow a^2 + a > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

Пример 2. Найти все значения k, при которых один корень уравнения $(k+1)x^2 + 2(3k+5)x + 5(2k+5) = 0$ меньше -3 , а другой - больше 1.

Решение. Чтобы не рассматривать два случая, разделим обе части уравнения на $k+1 \neq 0$

Получим $x^2 + \frac{2(3k+5)}{k+1}x + \frac{5(2k+5)}{k+1} = 0$ (1)

Обозначим левую часть уравнения (1) через $f(x)$ и изобразим в системе координат график функции $f(x)$ —параболу с ветвями, направленными вверх (рис. 2).

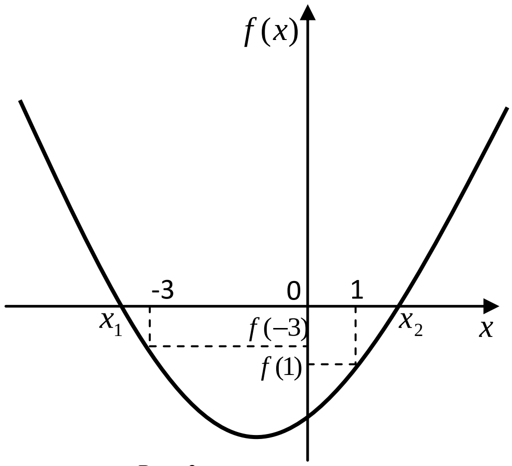

Рис. 2

Из рисунка видно, что для того, чтобы числа -3 и 1 принадлежали интервалу (x_1, x_2), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{cases} f(-3) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$$

Решим полученную систему неравенств.

$$\begin{cases} 9 - \dfrac{6(3k+5)}{k+1} + \dfrac{5(2k+5)}{k+1} < 0 \\ 1 + \dfrac{2(3k+5)}{k+1} + \dfrac{5(2k+5)}{k+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k+4}{k+1} < 0 \\ \dfrac{17k+36}{k+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-2\frac{2}{17}; -1)$$

Ответ: $k \in (-2\frac{2}{17}; -1)$

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение

$ax^2 + x + a - 1 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 *и* x_2, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$?

Решение. Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{1}{a}x + \frac{a-1}{a} = 0$.

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{a-1}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{1}{a} \end{cases} \qquad (2)$$

Преобразуем неравенство

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$$

Имеем

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1 \qquad (3)$$

Подставив из системы (2) соответствующие значения суммы и произведения корней в неравенство (3), получим:

$$\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{4(a-1)}{a}}{\frac{(a-1)^2}{a^2}} > 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{1 - 4a^2 + 4a - (a-1)^2}{(a-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5a^2 - 6a}{(a-1)^2} < 0 \Leftrightarrow a \in (0;1) \cup (1;\frac{6}{5})$$

Ответ: $a \in (0;1) \cup (1;\frac{6}{5})$

Пример 4. Решить уравнение $\frac{(a-x)^4 + (x-b)^4}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^4 + b^4}{(a+b)^2}$:

Решение. Преобразуем правую часть уравнения.

$$\frac{a^4 + b^4}{(a+b)^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 2a^2 b^2}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2 (a+b)^2 + 2a^2 b^2}{(a+b)^2} = (a-b)^2 + \frac{2a^2 b^2}{(a+b)^2} \qquad (4)$$

Аналогично преобразуем левую часть уравнения.

$$\frac{(a-x)^4 + (x-b)^4}{(a+b-2x)^2} = \frac{\left((a-x)^2 - (x-b)^2\right)^2 + 2(a-x)^2 (b-x)^2}{(a+b-2x)^2} = (a-b)^2 + \frac{2(a-x)^2 (b-x)^2}{(a+b-2x)^2} \qquad (5)$$

Приравнивая правые части равенств (4) и (5), получим $\frac{ab}{a+b} = \pm \frac{(a-x)(b-x)}{a+b-2x}$. Таким образом, исходное уравнение 4-й степени сводится к совокупности двух уравнений 2-й степени:

$$\left[\begin{array}{l} (a+b)(a-x)(b-x) = ab(a+b-2x) \\ (a+b)(a-x)(b-x) = -ab(a+b-2x) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\left(x(a+b) - (a^2 + b^2)\right) = 0 \\ (x - (a+b))(x(a+b) - 2ab) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = \dfrac{a^2 + b^2}{a+b} \\ x = a+b, x = \dfrac{2ab}{a+b} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0, x = a+b, x = \frac{2ab}{a+b}, x = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$ при $a \neq \pm b$.

Выводы. Из приведенных примеров видно, что нет единого метода решения квадратичных уравнений с параметрами, каждая такая задача требует своего подхода. При решении используются известные формулы для корней квадратного уравнения и условия существования действительных корней – знак дискриминанта, теорема Виета. В некоторых случаях при наличии условия принадлежности корней уравнения определенному промежутку целесообразно применение графического метода решения.

Список литературы / References

1. *Старков В.Н.* 165 задач с параметрами (в помощь абитуриенту) // Методические указания. СПб. Изд. СПБГУ, 2004. 25 с.
2. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач. Уч. пособ. для 10 кл. ср. школы. М.: Просвешение, 1989. 252 с.