

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ ЧАСТОТ Гомцяян О.А.¹, Мосоян Д.О.² Email: Gomtsyan1157@scientifictext.ru

¹Оганес Гомцяян Авакович - доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой;

²Давид Мосоян Оганесович - магистрант,
кафедра радиоустройств,
Национальный политехнический университет Армении,
г. Ереван, Республика Армения

Аннотация: при компьютерном моделировании различных цифровых радиотехнических систем часто возникает необходимость исследования данных систем при различных частотах дискретизации и среза. При наличии в системе цифровых фильтров часто приходится варьировать эти параметры. В работе исследованы модели цифровых фильтров нижних частот (ЦФНЧ), расчет коэффициентов которых производится с помощью полученных соотношений при изменении частот среза и дискретизации фильтра, что позволяет без пересчета коэффициентов фильтра для новой частоты дискретизации продолжить моделирование без потери времени.

Ключевые слова: частота дискретизации, билинейное преобразование, порядок фильтра, каскадное соединение.

MODELING DIGITAL FILTERS OF LOWER FREQUENCIES Gomtsyan O.A.¹, Mosoyan D.O.²

¹Gomtsyan Hovhannes Avakovich - Doctor of technical sciences, Professor, Head of Department;

²Mosoyan David Ovanesovich - Master Student,
RADIODEVICES DEPARTMENT,
NATIONAL POLYTECHNIC UNIVERSITY OF ARMENIA,
YEREVAN, REPUBLIC OF ARMENIA

Abstract: during the computer modelling of various digital radio systems, it is often necessary to investigate these systems at different sampling and cut-off frequencies. If there are digital filters in the system, you have to vary these parameters. Therefore, we studied models of digital low-pass filters (DLPF), whose coefficients are calculated using the obtained relations for changing the cut-off and sampling frequencies, which allows to continue the simulation without losing time, without recalculating the filter coefficients for the new sampling rate.

Keywords: sampling frequency, bilinear transformation, filter order, cascade connection.

УДК 621.391.26

1 Теоретическая часть.

Цифровые фильтры можно разделить на два основных больших класса: рекурсивные и не рекурсивные, алгоритмы которых во временной области в общем виде описываются следующими соотношениями соответственно [1]

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots] \quad (1)$$

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots], \quad (2)$$

где $x(n)$ и $y(n)$ - входная и выходная последовательности сигналов, соответственно.

Из этих двух алгоритмов более экономичным является первый, т.к. при этом используют данные об уже рассчитанных значениях сигнала $y(n)$ в нескольких предыдущих тактах и повторные расчеты не производятся, как это имеет место во втором алгоритме. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать рекурсивные цифровые фильтры (РЦФ).

В частотной области передаточная функция рекурсивного цифрового фильтра представляется следующей моделью [1]

$$K(z) = \frac{\sum_{k=0}^r \alpha_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^n \beta_l \cdot z^{-l}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (3)$$

где $z = e^{\sigma + j\omega}$ - аргумент передаточной функции.

$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X(n) \cdot z^{-n} - Z$ - преобразование последовательности $X(n)$.

α_k, β_l - действительные коэффициенты для аппроксимации требуемой частотной или импульсной характеристики фильтров.

Во временной области разностное уравнение цифрового фильтра имеет следующий вид [1]

$$y(n) = \sum_{k=0}^N \alpha_k x(n-k) - \sum_{l=1}^N \beta_l y(n-l) \quad (4)$$

Существует несколько форм (схем) построения цифровых фильтров (ЦФ): прямая, параллельная, каскадная и др. из которых наиболее интересной, на наш взгляд, является каскадная, поскольку она чаще встречается и позволяет довольно просто синтезировать фильтры высоких порядков, используя, как правило, элементарные субфильтры первого и второго порядков [1, 2]. При этом передаточную функцию можно представить следующим образом

$$K(z) = \alpha_0 \prod_{j=1}^M K_j(z), \quad (5)$$

где $K_j(z)$ - передаточные функции субфильтров первого или второго порядков, M – количество каскадно включенных блоков.

Передаточные функции субфильтров первого и второго порядков описываются следующими уравнениями

$$K_j^{(1)}(z) = \frac{1 + \alpha_1 j z^{-1}}{1 + \beta_1 j z^{-1}} \quad (6)$$

$$K_j^{(2)}(z) = \frac{1 + \alpha_1 j z^{-1} + \alpha_2 j z^{-2}}{1 + \beta_1 j z^{-1} + \beta_2 j z^{-2}} \quad (7)$$

При реализации РЦФ в различных формах возникают эффекты, связанные с квантованием входного воздействия, поскольку при умножении или сложении результат округляется или усекается, что приводит к ошибкам в расчетах. Кроме того, может произойти также и смещение полюсов передаточной функции ЦФ, что приводит к его неустойчивости. Исследования показывают, что с ростом порядка фильтра эти смещения при прямой форме реализации увеличиваются [3]. Поэтому в прямой форме нежелательна реализация фильтров выше второго порядка. В этом случае, следует отдать предпочтение каскадной схеме с соответствующим подбором масштабирующих множителей.

В ряде публикаций [1-3] достаточно подробно изложены основные методы синтеза цифровых фильтров, которые, в конечном итоге, сводятся к определению коэффициентов α_k и β_l . Как известно, существуют несколько методов расчета РЦФ, наиболее распространенным из которых является метод расчета по (аналоговым) фильтрам непрерывного времени с преобразованием области p в область z при помощи соответствующей замены переменных по методу билинейного преобразования. При этом будем считать, что имеется устойчивый аналоговый фильтр-прототип с передаточной функцией $K(p)$, где в общем случае p представлена в виде оператор преобразования Лапласа $p = \Sigma + j\Omega$. Если заменить оператор p на некоторую рациональную функцию от z , отображающую мнимую ось $j\Omega$ на единичную окружность в плоскости z , то получится функция $K(z)$, которая на окружности принимает те же значения, что и функция $K(p)$, определенная на мнимой оси. При этом зависимость между p и z имеет по определению следующий вид

$$z = e^{p_1 T} = e^{(\sigma + j\omega)T}, \quad (8)$$

где T - период дискретизации, а оператор $p_1 = \sigma + j\omega$ отображает частоты на плоскости z .

Как видно из (8) эта зависимость имеет нелинейный характер. Если теперь просто заменить p на z , то полученное выражение для $K(z)$ не будет рациональной функцией и не может быть реализовано. Поэтому для замены было предложено билинейное преобразование вида [2, 3]

$$p = \frac{2}{T} \cdot th\left(\frac{p_1 T}{2}\right), \quad (9)$$

Подставив (8) в (9) можно получить другую запись этого преобразования

$$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (10)$$

Заменив величину p в передаточной функции $K(p)$ на выражение (10), получим передаточную функцию цифрового фильтра $K(z)$, которая является действительной рациональной функцией от z^{-1} .

Соотношение между частотами среза полосы пропускания аналогового фильтра Ω_c и соответствующего цифрового фильтра ω_c имеет следующий вид

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \cdot tg\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) \quad (11)$$

Отсюда видно, что эта зависимость нелинейная и частота среза аналогового фильтра изменяется, т.е. происходит, так называемая, деформация частот. Следовательно, для корректного преобразования Ω_c в ω_c следует задаться определенной частотой Ω_c . Однако, практически, во всех справочниках приводятся передаточные функции нормированных аналоговых фильтров, у которых $\Omega_c = 1$. С целью “денормировки” прежде, чем осуществить преобразование (10) во [2] предлагается предварительно использовать замену оператора p , например, для фильтров нижних частот, на p/Ω_c . Отметим, что

рассмотренные два преобразования несколько усложняют вычисления и, кроме того, множитель $\frac{2}{T}$ в (9) и (10) можно не учитывать. Тогда для ЦФНЧ окончательно получим

$$\Omega_c = tg\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) \quad (12)$$

$$p = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (13)$$

Из (11) нетрудно получить и другую зависимость между Ω_c и ω_c .

$$\omega_c = \frac{2}{T} \cdot arctg\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right) \quad (14)$$

Выражения (12) и (14) дают возможность синтезировать ЦФ по аналоговому типу по следующей методике:

1. по справочникам выбирается требуемая передаточная функция $K(p)$ фильтра-прототипа, далее производится двойная (или одинарная) замена оператора p для получения передаточной функции ЦФ в виде отношения полиномов по степеням z^{-1} ;

2. задаются частоты дискретизации F_s , среза полосы пропускания ω_c и затухание A_c на этой частоте, а также переходная частота ω_n и затухание A_n на этой частоте требуемого ЦФ;

3. вычисляется порядок фильтра n .

Определив порядок фильтра, можно синтезировать его каскадным соединением субфильтров первого и второго порядков, как было отмечено ранее.

2 Результаты расчетов.

Ниже приводится методика расчета субфильтров, причем, в качестве аналоговых используются фильтры нижних частот Баттерворта, имеющие известные преимущества и недостатки перед другими типами фильтров [1].

Для нормированного аналогового фильтры нижних частот Баттерворта первого порядка из [3] находим его передаточную функцию

$$K(p) = \frac{1}{1+p} \quad (15)$$

Произведя первую замену p на p/Ω_c , получим следующее выражение

$$K\left(\frac{p}{\Omega_c}\right) = \frac{1}{1+p/\Omega_c} = \frac{\Omega_c}{p+\Omega_c} \quad (16)$$

Далее, осуществив вторую замену

$$p = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{z-1}{z+1},$$

получим

$$K(z) = \frac{\Omega_c}{\Omega_c + \frac{z-1}{z+1}}. \quad (17)$$

Опуская промежуточные выкладки, окончательно получим

$$K(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}}, \quad (18)$$

где коэффициенты фильтра равны

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\Omega_c}{\Omega_c+1}, \quad \beta_1 = \frac{\Omega_c-1}{\Omega_c+1},$$

причем, $\Omega_c = tg\frac{\omega_c T}{2} = tg\frac{\pi F_c}{F_s}$, $\omega_c = 2\pi F_c$, $aF_s = \frac{1}{T}$ - частота дискретизации.

В соответствии с этой передаточной функцией $K(z)$ составим разностное уравнение фильтра во временной области, с помощью которого можно осуществить моделирование данного цифрового фильтра

$$y(n) = \alpha_0 x(n) + \alpha_1 x(n-1) - \beta_1 y(n-1) \quad (19)$$

Отметим, что начальное условие можно выбрать нулевым.

Общая методика расчета ЦФ по аналоговому типу приведена в [1,2]. Воспользуемся рекомендациями, приведенными в этих публикациях и рассмотрим пример расчета порядка фильтра ЦФ со следующими данными: частота дискретизации $F_s = 32$ кГц; частота среза полосы пропускания $F_c = 3.4$ кГц и затухание на этой частоте $A_c = 3$ дБ; переходная частота $F_n = 8$ кГц и затухание на этой частоте $A_n = 20$ дБ.

Как известно, ФНЧ Баттерворта определяется квадратом модуля его передаточной функции, равным [2]

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)} \right]^{2n}} \quad (20)$$

Тогда из приведенных выше данных имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi F_c}{F_s} = \operatorname{tg}\frac{\pi \cdot 3,4}{32} = 0,346; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_n T}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi F_n}{F_s} = \operatorname{tg}\frac{\pi \cdot 8}{32} = 1$$

Так как на переходной частоте затухание выбрано 20дБ (10 раз), то из (20) можем записать

$$\sqrt{1 + \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)} \right]^{2n}} = \sqrt{1 + \left[\frac{1}{0,346} \right]^{2n}} = 10$$

Откуда определим порядок фильтра $n = 3$. Такой фильтр можно синтезировать, например, каскадным соединением трех субфильтров первого порядка или двух субфильтров второго и одного субфильтра первого порядков.

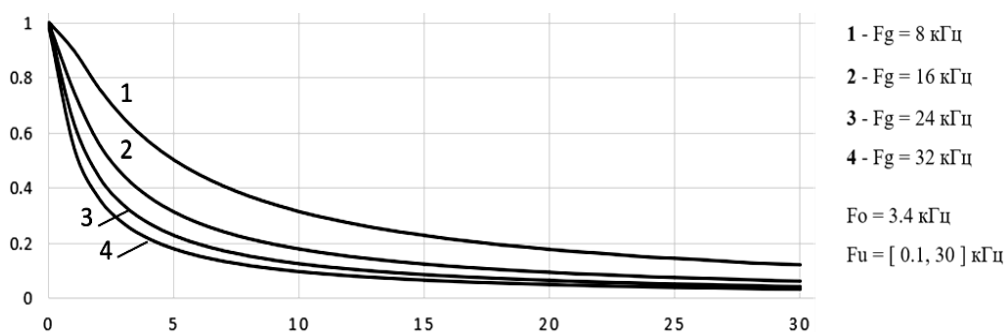


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики ФНЧ первого порядка

3 Заключение.

Отличительной особенностью предложенной методики является то, что при необходимости синтезировать фильтр, не требуется определять коэффициенты для новой частоты среза и дискретизации, т.к., задав их, расчет производится по полученным формулам. Таким образом, можно варьировать эти частоты и исследовать характеристики фильтров, не осуществляя каждый раз новый расчет этих коэффициентов.

В нашей работе осуществлено компьютерное моделирование амплитудно-частотной характеристики субфильтра первого порядка по вышеприведенным формулам при разных F_c и F_s . (рис. 1).

Список литературы / References

1. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. / Пер. с англ. М.: ООО "Бином-Пресс", 2007.
2. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ.; Под ред. А.М. Трахтмана. М.: Сов. радио, 1973.
3. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ.; Под ред. С.Я. Шаца. М.: Связь, 1979.
4. Богнер Р., Константинович А. Введение в цифровую фильтрацию / Пер. с англ.; Под ред. Л.И. Филлипова. М.: Мир, 1976.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ.; Под ред. Ю.Н.Александрова. М.: Мир, 1978.
6. Мизин И.А., Матвеев А.А. Цифровые фильтры (Анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ). М.: Связь, 1979.
7. Рекурсивные фильтры на микропроцессорах / А.Г. Остапенко, А.Б. Сушков и др.; Под ред. А.Г. Остапенко. М.: Радио и связь, 1988.